

**НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ им. Г.М. АБДУЛЛАЕВА**

На правах рукописи

АЙНУРА МАМЕДРЗА КЫЗЫ ДЖАФАРОВА

**РЕШЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ
ДЕФОРМИРОВАННЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ**

2212.01 – Теоретическая физика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по физике

БАКУ – 2016

Работа выполнена в Институте Математики и Механики
Национальной Академии Наук Азербайджана

Научные руководители:

Доктор физико-математических наук **Н.М. АТАКИШИЕВ**

Кандидат физико-математических наук **Ф.Б. ИМРАНОВ**

Официальные оппоненты:

Доктор физико-математических наук,
профессор **Ш.М. НАГИЕВ**

Кандидат физико-математических наук,
доцент **М.Р. РАДЖАБОВ**

Ведущая организация: Азербайджанский Государственный
Университет Нефти и Промышленности,
Кафедра «Физика»

Защита состоится «21» декабря 2016 г. в «11⁰⁰» часов на
заседании Диссертационного Совета D.01.011 при Институте Физики
НАН Азербайджана по адресу: AZ-1143, г. Баку, пр. Г. Джавида 131,
Институт Физики НАН Азербайджана, главный корпус, 3-й этаж, зал
для заседаний.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института
Физики НАН Азербайджана.

Автореферат разослан «18» ноября 2016 г.

**Ученый секретарь
Диссертационного Совета,
доктор физико-математических наук,
профессор**

Д.Г. АРАСЛЫ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Как известно, стандартная нерелятивистская квантовая механика базируется на вероятностной интерпретации волновой функции элементарной частицы, определенной во всем трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$. Поэтому координата $\mathbf{r}$ и импульс $\mathbf{p}$ частицы по предположению меняются в бесконечных интервалах. Однако, очень часто подобная интерпретация не совсем соответствует физической реальности, поскольку существуют очень много интересных случаев квантовых систем, имеющих конечные размеры. Прекрасным примером такого рода могут служить квантовые процессы в различных оптических системах, решеточные модели полупроводниковых и сверхпроводниковых соединений, а также спиновые цепочки во внешнем магнитном поле.

Несмотря на общепринятую идею о существовании численных решений конечно-разностных уравнений, обобщающих известные дифференциальные уравнения, существует целое семейство разностных уравнений, которые можно решить аналитически и эти решения выражаются через некоторые ортогональные многочлены. Такие многочлены, как многочлены Шарлье, Кравчука, Хана и дуальные многочлены Хана, Мейкснера и Мейкснера-Поллачека, непрерывные дуальные многочлены Хана, многочлены Рака и Уильсона, а также все q -деформированные аналоги многочленов, входящих в таблицу Аски ортогональных многочленов, являются именно такими многочленами. Надо отметить, что, не только уравнения, решениями которых являются эти многочлены, а также их трехчленные рекуррентные соотношения и так называемые уравнения сдвига вперед и назад, по своей форме являются разностными уравнениями. Все вышеперечисленные многочлены являются ортогональными, но в зависимости от природы их переменных, они могут удовлетворить как дискретным, так и непрерывным условиям ортогональности, причем ортогональность может проявить себя как в конечном, так и в бесконечном интервале.

Напомним, что если заменить волновую функцию частицы на ее разностный или q -разностный аналог, а затем попытаться исследовать физические свойства подобной деформированной модели, то эта задача будет эквивалентна компактификации координатного и

импульсного представлений. Если многочлены Эрмита, которые составляют существенную часть волновой функции нерелятивистского квантового гармонического осциллятора, ортогональны на всей вещественной оси R , то в настоящее время хорошо известны их разностные или деформированные аналоги, которые "живут" на конечном интервале.

Например, если многочлены Мейкснера-Поллачека, непрерывные многочлены Хана, непрерывные дуальные многочлены Хана и многочлены Уильсона удовлетворяют непрерывному условию ортогональности в бесконечном интервале, то многочлены Мейкснера и Шарлье являются дискретными многочленами, а многочлены Кравчука, Хана, Рака и дуальные многочлены Хана, в свою очередь, являются конечно-дискретными многочленами. Именно, их конкретное поведение по ортогональности дает нам идею о том, для описания какого рода динамических систем они могут быть полезными. Необходимо отметить, что многочлены Шарлье и Мейкснера были применены для построения бесконечно-дискретных моделей квантового гармонического осциллятора, динамическими симметриями которых являются алгебра Гейзенберга-Вейла и алгебра Ли $su(1,1)$. Многочлены Мейкснера-Поллачека и непрерывные дуальные многочлены Хана также были применены при построении точно-решаемых непрерывных моделей квантового гармонического осциллятора, где, если модель с волновой функцией, выраженной через многочлены Мейкснера-Поллачека ведет к динамической симметрии с алгеброй Ли $su(1,1)$, то похожая модель с волновой функцией, выраженной через непрерывные дуальные многочлены Хана ведет к деформированной динамической симметрии с алгеброй Ли $su(1,1)_\gamma$. Надо отметить, что осцилляторная модель с деформированной алгеброй Ли $su(1,1)_\gamma$, является обобщением осцилляторной модели с алгебраической симметрией $su(1,1)$ и при $\gamma = 0$, полностью восстанавливает ее. Следует отметить также, что существует релятивистская модель квантового гармонического осциллятора, которая решается в искривленном пространстве Лобачевского. Динамической симметрией этой модели также является алгебра Ли $su(1,1)$, а ее волновые функции стационарных состояний в импульсном и координатном представлениях выражаются соответственно через многочлены Лагерра и Мейкснера-Поллачека. Эти два представления связаны между собой через так называемое

преобразование Шапиро.

Случай алгебры Ли $su(2)$ также интересен с точки зрения их применения как динамической симметрии точно-решаемых квантовых осцилляторных моделей. Этот случай в корне отличается от $su(1,1)$ в смысле того, что построенная модель осциллятора является конечно-дискретной и волновые функции стационарных состояний такого осциллятора выражаются через симметричные многочлены Кравчука. В последние годы, алгебра Ли $su(2)$ также была деформирована с помощью так называемого оператора четности или отражения и были предложены две успешные реализации такой деформации в виде конечно-дискретного квантового гармонического осциллятора. Волновые функции стационарных состояний этих моделей выражаются через многочлены Хана или дуального Хана и при определенных частных случаях и пределе, эти модели переходят соответственно, в известные конечно-дискретные и парабозонные модели квантового гармонического осциллятора.

Другой подход к деформации $su(2)$ - так называемая q -деформация алгебры Ли $su(2)$, которая основывается на известном методе q -деформации алгебры Гейзенберга-Вейля и замене обычных коммутационных соотношений между операторами рождения и уничтожения на их более обобщенное q -деформированное коммутационное соотношение. Следует отметить, что несмотря на более усложненную форму коммутационных соотношений при алгебре Ли $su(2)$ и в случае q -деформированной алгебры, существуют примеры точного решения реализованных моделей квантового гармонического осциллятора в фазовом пространстве.

Все перечисленные точные реализации квантового гармонического осциллятора на данный момент имеют широкий спектр применений в разных областях науки и технологий. Примерами таких применений являются создание релятивистского подхода к квантовой механике в искривленных пространствах, который считается альтернативой квантовой теории поля, идеальная передача кубит информации по фермионным спиновым цепочкам типа XXZ под влиянием внешнего магнитного поля, изучение разных твердотельных решеточных моделей и для описания точнорешаемых процессов рождения и уничтожения. Эти применения только несколько примеров из вышеуказанного широкого применения точнорешаемых осцилляторных моделей.

Целью данной диссертации является формулировка и детальное исследование так называемых деформированных квантовых систем, являющихся обобщениями квантового гармонического осциллятора. При этом рассматривались такие задачи как нахождение спектров гамильтонианов и аналитического вида их собственных функций, которые в данном подходе являются точными решениями некоторых разностных уравнений. Другие физические характеристики этих деформированных квантовых систем, такие как квантовая функция распределения Хусими и алгебра динамической симметрии также были точно найдены. В рамках проводимых исследований, нами ставились следующие задачи:

1. Построение дискретной модели линейного квантового гармонического осциллятора в конечном конфигурационном представлении в терминах многочленов Кравчука с динамической симметрией так называемой **CP**-деформации алгебры Ли $su(2)$;

2. Построение дискретной модели линейного квантового гармонического осциллятора в бесконечном конфигурационном представлении в терминах многочленов Мейкснера с динамической симметрией группы Лоренца $SO(2,1)$;

3. Построение фазового представления q -деформированного гармонического осциллятора и нахождение точного выражения функции Хусими для суперпозиции его волновых функций в терминах многочленов Роджерса-Сего;

4. Построение конфайнментной модели линейного квантового гармонического осциллятора в конечно-непрерывном конфигурационном представлении в терминах непрерывных многочленов q -Эрмита.

Методы исследования. Точная решаемость стационарного разностного уравнения при дискретной формулировке осцилляторной проблемы в квантовой механике, методы нахождения замкнутых коммутационных соотношений между генераторами группы Лоренца и Ли рассматриваемых моделей, получение точных пределов при исчезновении параметров деформации в случае бесконечно-непрерывного конфигурационного пространства.

Научная новизна. В диссертации, впервые построены новые модели дискретного гармонического осциллятора как в случае конечного, так и в бесконечного конфмгурационного пространства. При выборе дискретности конфигурационного пространства, были

применены подходы как эквидистантности, так и неэквидистантности построенных моделей. Также, было построено фазовое представление деформированных осцилляторов в единицах функций Хусими. В частности, были решены следующие задачи:

1. Была построена дискретная модель линейного квантового гармонического осциллятора в неэквидистантном конечном конфигурационном представлении в терминах многочленов Кравчука с динамической симметрией так называемой **CP**-деформации алгебры Ли $su(2)$;

2. Была построена дискретная модель линейного квантового гармонического осциллятора в бесконечном эквидистантном конфигурационном представлении в терминах многочленов Мейкснера с динамической симметрией группы Лоренца $SO(2,1)$;

3. Построена конфайнментная модель линейного квантового гармонического осциллятора в конечно-непрерывном конфигурационном представлении в терминах непрерывных многочленов q -Эрмита;

4. Было построено фазовое представление q -деформированного гармонического осциллятора и найдены точные выражения функции Хусими для суперпозиции его волновых функций в терминах многочленов Роджерса-Сего.

Научная и практическая ценность. Практическая ценность работы заключается в том, что в ней по сути дела формулируется общий подход к дискретизации различных физических систем в терминах классических многочленов дискретной пременной. Тем самым значительно упрощается проблема нахождения численных характеристик сложных физических систем, не поддающихся точному аналитическому описанию в недеформированном случае.

В диссертации впервые сформулированы дискретные модели как в бесконечных, так и конечных конфигурационных представлениях. Также построена точнорешаемая конфайнментная модель квантового осциллятора, волновые функции которого выражаются через непрерывные многочлены q -Эрмита. Кроме этого, фазовое представление q -осциллятора изучено с помощью аналитических выражений сглаженной функции Вигнера или функции Хусими.

Дискретные осцилляторные модели, построенные в этой диссертации, могут служить математическим прототипом таких

прикладных задач, как распознавание аналоговых график, решеточные модели твердотельных соединений, комплексные процессы рождения-уничтожения и т.д. Точнорешаемая конфайнментная модель непрерывного квантового осциллятора, построенная в диссертационной работе, может служить аналогом квантовых точек, проволок или ям, широко применяемых для описания различных гетероструктур в нано-размерах.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на:

- научных семинарах Институты Математики и Механики и Физики НАН Азербайджана;
- XI Международном Семинаре по теории Ли и ее применения в Физике, 15-21 июня 2015, Варна, Болгария;
- XXX Международном коллоквиуме по теоретико-групповым методам в физике, 14-18 июля 2014 года, Гент, Бельгия;
- Азиатско-Тихоокеанской Конференции по Квантовой Информатике - APCWQIS-2013, 15-18 декабря 2013-го года, Сеул, Южная Корея;
- Международной Конференции по актуальным проблемам математики и информатики, посвященной 90-летию со дня рождения Гейдара Алиева, 2013- го года, Баку, Азербайджан.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка цитированной литературы из 86 наименований, содержит 130 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

В **первой главе** делается обзор по неприводимым представлениям группы вращений $SO(3)$.

§1.1 посвящен определению неприводимых представлений группы вращений $SO(3)$, где детально обсуждается определение унитарной матрицы T_g , которая соответствует вращению g в трехмерном пространстве. Далее, показано, каким образом, матрицы $T_g = T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ определяются через матрицы бесконечно малых вращений A_1, A_2, A_3

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = E + A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + A_3 \xi_3 + \dots,$$

где E - единичная матрица, A_1, A_2, A_3 - постоянные матрицы, являющиеся частными производными матрицы $T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ по ξ_1, ξ_2, ξ_3 при $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$, соответственно. Важно подчеркнуть, что матрицы A_1, A_2, A_3 в свою очередь являются генераторами группы $SO(3)$.

В §1.2 определяется явный вид неприводимых представлений. Показано, что преобразования A_1, A_2 и A_3 , отвечающие при этом представлении бесконечно малым поворотам вокруг осей координат, задаются в каноническом базисе f_m ($m = -l, -l+1, \dots, l$) формулами

$$A_1 f_m = -iH_1 f_m = -i/2 \sqrt{(l+m+1)(l-m)} f_{m+1} - i/2 \sqrt{(l+m)(l-m+1)} f_{m-1},$$

$$A_2 f_m = -iH_2 f_m = -\frac{1}{2} \sqrt{(l+m+1)(l-m)} f_{m+1} + \frac{1}{2} \sqrt{(l+m)(l-m+1)} f_{m-1},$$

$$A_3 f_m = -iH_3 f_m = -im f_m.$$

§1.3 посвящен нахождению сферических функций, которые являются собственными функциями матриц бесконечно малых вращений A_1, A_2, A_3 . В частности, находится явный вид дифференциальных операторов, отвечающих бесконечно малым поворотам

$$\begin{aligned} A_1 &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + ctg \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ A_2 &= -\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + ctg \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ A_3 &= -\frac{\partial}{\partial \varphi}, \end{aligned}$$

и дифференциальное уравнение, точным решением которого являются сферические функции:

$$H_3 Y_l^m(\theta, \varphi) = -i \frac{\partial Y_l^m(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} = m Y_l^m(\theta, \varphi),$$

где,

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = e^{im\varphi} F_l^m(\theta, \varphi).$$

Далее показано, что явный вид сферических функций выражается через функции Лежандра:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} P_l^m(\cos \theta),$$

$$P_l^m(\mu) = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \frac{1}{2^l l!} (1-\mu^2)^{-\frac{m}{2}} \frac{d^{l-m}(\mu^2-1)^l}{d\mu^{l-m}}.$$

Целью **второй главы** является построение дискретной модели линейного квантового гармонического осциллятора в неэквидистантном конечном конфигурационном представлении, динамической симметрией которого является называемая **СП**-деформация алгебры Ли $su(2)$, а волновые функции модели выражаются через многочлены Кравчука.

В §2.1 дается общее определение многочленов Кравчука:

$$K_n(x; p, N) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, -x \\ -N \end{matrix} \middle| \frac{1}{p}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N,$$

а также приводятся их основные свойства:

$$K_n(m; p, N) = K_m(n; p, N), \quad m = 0, 1, 2, \dots, N,$$

$$K_n(x; p, N) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^n K_n(N-x; 1-p, N).$$

§2.2 посвящен связи разностного уравнения собственного вектора для функций Кравчука с генераторами группы вращений:

$$H^{(M)} \psi_n^{(M)} = (M-n) \psi_n^{(M)}, \quad M-n \in \{-M, -M+1, \dots, M\},$$

где,

$$\psi_n^{(M)}(x_m) = \frac{(-1)^n}{2^M} \sqrt{\binom{2M}{n} \binom{2M}{M+x_m}} K_n\left(M+x_m; \frac{1}{2}, 2M\right),$$

А Гамильтониан:

$$H^{(M)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{1-M}^{(M)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_{1-M}^{(M)} & 0 & \alpha_{2-M}^{(M)} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{2-M}^{(M)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_M^{(M)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_M^{(M)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_m^{(M)} := \sqrt{(x_m + M)(M - x_m + 1)}, \quad x_m \in \{-M, -M + 1, \dots, M\}.$$

В §2.3 обсуждается общий подход для построения дискретной модели линейного квантового гармонического осциллятора в терминах многочленов Кравчука.

В §2.4 приводится определение, включающее в себя точную формулировку алгебры Ли $su(2)$ с CP деформируемый симметрий. В частности, дано определение, по которому, алгебра $su(2)_{cp}$ является унитарной алгеброй с базисными элементами J_0, J_+, J_- , C и P , которые удовлетворяют следующим соотношениям:

- оператор C коммутирует со всеми базисными элементами.
- P является оператором четности, удовлетворяющим $P^2 = 1$ и

$$[P, J_0] = PJ_0 - J_0P = 0, \{P, J_{\pm}\} = PJ_{\pm} + J_{\pm}P = 0,$$

• CP деформированная алгебра $su(2)$ определяется следующим образом:

$$[J_0, J_{\pm}] = \pm J_{\pm},$$

$$[J_+, J_-] = 2J_0(CP - 1).$$

Также, действие базисных элементов J_0, J_+ , и J_- определяется по формуле:

$$J_0|j, m\rangle = m|j, m\rangle,$$

$$J_+|j, m\rangle = \begin{cases} \sqrt{(j-m)(j-m-1)}|j, m+1\rangle, & \text{если } j+m \text{ четное;} \\ \sqrt{(j+m)(j+m+1)}|j, m+1\rangle, & \text{если } j+m \text{ нечетное;} \end{cases}$$

$$J_-|j,m\rangle = \begin{cases} \sqrt{(j-m)(j+m-1)}|j,m-1\rangle, & \text{если } j+m \text{ четное;} \\ \sqrt{(j-m)(j-m+1)}|j,m-1\rangle, & \text{если } j+m \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Здесь, j должен быть целым числом (а не полуцелым) для того, чтобы представление не нарушилось (для этого, необходимо еще удовлетворение $J_+|j,j\rangle = 0$ и $J_-|j,-j\rangle = 0$).

Представление алгебры дополняется также действием операторов C и P :

$$\begin{aligned} C|j,m\rangle &= 2j|j,m\rangle, \\ P|j,m\rangle &= (-1)^{j+m}|j,m\rangle. \end{aligned}$$

§2.5 посвящен построению самой модели одномерного осциллятора на основе алгебры $su(2)_{\mathbb{C}P}$. В основе построенной модели лежат пара разностных уравнений для симметричных многочленов Кравчука ($p = 1/2$), которые найдены в рамках данной диссертационной работы и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} j(2j-1)K_{j+n}\left(2(x+1); \frac{1}{2}, 2j\right) &= -(x+1)(2x+1)K_{j+n-1}\left(2x; \frac{1}{2}, 2(j-1)\right) + (j-x-1)(2j-2x-3)K_{j+n-1}\left(2(x+1); \frac{1}{2}, 2(j-1)\right), \\ 2(j+n)(j-n)K_{j+n-1}\left(2x; \frac{1}{2}, 2(j-1)\right) &= j(2j-1)K_{j+n}\left(2x; \frac{1}{2}, 2j\right) - j(2j-1)K_{j+n}\left(2(x+1); \frac{1}{2}, 2j\right). \end{aligned}$$

Также, собственные значения q оператора координаты $\hat{q}$ задаются, как

$$q_{\pm(j-k)} = \pm\sqrt{(j-k)(j+k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, j.$$

(a) ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

(b) ○○○○○ ○ ○ ○○○○○

(c) ⊗○○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ⊗

Рисунок 1. Спектр оператора координаты для $j = 5$: (a) в случае модели $\text{su}(2)$, (b) в случае модели $\text{sl}(2|1)$, (c) в случае модели $\text{su}(2)_{\text{Ср}}$.

В §2.6, находятся волновые функции стационарных состояний гармонического осциллятора в координатном представлении. Для случая, когда $j + m = 2n$ принимает четные значения, и собственные значения координаты являются положительными, то, волновые функции в координатном пространстве имеют следующее выражение:

$$\Psi_{2n}(q_k) = (-1)^n 2^{k-j} \widetilde{K}_{2n} \left(k; \frac{1}{2}, 2j \right), n = 0, 1, \dots, j, k = 1, \dots, j - 1,$$

в то время, как для нечетного случая $j + m = 2n + 1$ и положительных собственных значений координаты, имеем

$$\Psi_{2n+1}(q_k) = (-1)^n 2^{k-j} \widetilde{K}_{2n} \left(k - 1; \frac{1}{2}, 2j - 2 \right).$$

утом похожих вычислений, можно получить аналогичные выражения как для нулевого значения, так и для отрицательных значений координаты.

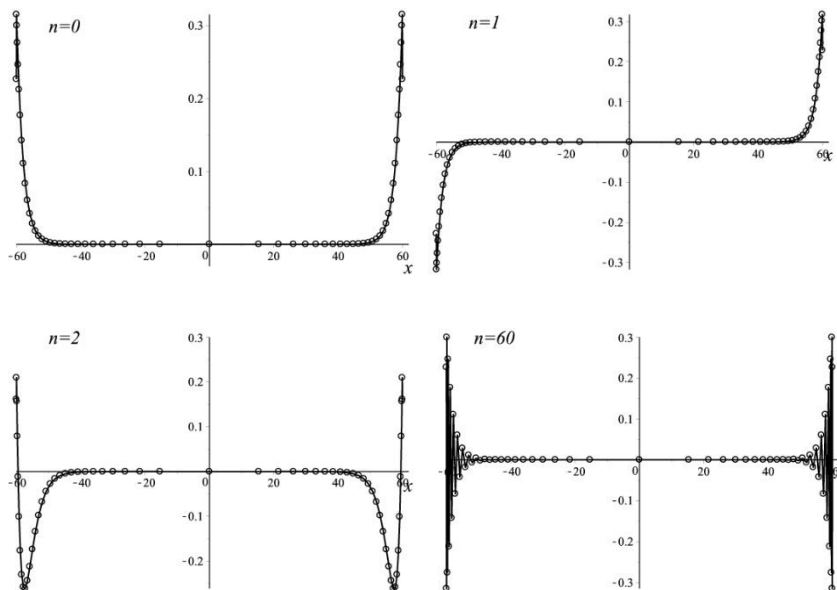


Рисунок 2. Дискретные волновые функции $\Psi_n(q)$ при $j = 30$.

Волновые функции представлены для состояний $n = 0, 1, 2, 60$

Целью **третьей главы** является построение дискретной модели линейного квантового гармонического осциллятора в бесконечном эквидистантном конфигурационном представлении с динамической симметрией группы Лоренца $SO(2,1)$, волновые функции которой выражаются через многочлены Мейкснера.

В §3.1 дается общее определение многочленов Мейкснера:

$$M_n(x; \beta, \gamma) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, -x \\ \beta \end{matrix} \middle| 1 - \frac{1}{\gamma} \right),$$

где $\beta > 0$ и $0 < \gamma < 1$, а также приводятся их основные свойства:

$$M_n(m; \beta, \gamma) = M_m(n; \beta, \gamma), \quad n, m = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} M_n(m; \beta, \gamma) M_{n'}(m; \beta, \gamma) \rho(m) = d_n \delta_{nn'},$$

$$\rho(x) = \frac{(\beta)_x \gamma^x}{\Gamma(x+1)}, \quad d_n = \frac{n!}{\gamma^n (\beta)_x (1-\gamma)^\beta}.$$

§3.2 посвящен связи разностного уравнения собственного вектора для функций Мейкснера с генераторами группы вращений. Показано, что можно интерпретировать генераторов трехмерной

группы Лоренца $SO(2,1)$ как триплет операторов $\{X, P, H\}$, определяющих бесконечно-дискретную модель линейного квантового гармонического осциллятора через функции Мейкснера:

$$\begin{aligned} K_1 &\Rightarrow X, & K_2 &\Rightarrow -P, & K_0 &\Rightarrow H, \\ [X, H] &= iP, & [H, P] &= iX, & [X, P] &= iH, \\ [H, [H, X]] &= X. \end{aligned}$$

В последней, **четвертой главе** рассматриваются задачи по построению моделей линейного квантового гармонического осциллятора в непрерывных конфигурационных и фазовых представлениях, волновые функции которых выражаются через q -деформированные ортогональные многочлены, а дискретных энергетический спектр является неэквидистантным.

В §4.1 дается общая информация о стационарных состояниях нерелятивистского одномерного квантового гармонического осциллятора в каноническом подходе, волновые функции которого и в координатном и в импульсном представлении выражаются через многочлены Эрмита и дальше эта задача обобщается на случай похожей модели под эффектом конфайнмента с формой потенциала:

$$V(x) = \begin{cases} x^2/2, & -a < x < a, \\ \infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Показано, что такое обобщение также приводит к точным решениям в единицах непрерывных многочленов q -Эрмита:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_n^{CHO}(x) &= \frac{(1-q)^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{(q^{n+1}; q)_{\infty} \omega(\tilde{x}|q)}}{(1-\tilde{x}^2)^{\frac{1}{4}}} H_n(\tilde{x}|q), \\ \tilde{\psi}_n^{CHO}(p) &= \frac{(-i)^n (1-q)^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{(q^{n+1}; q)_{\infty} \omega(\tilde{p}|q)}}{(1-\tilde{p}^2)^{\frac{1}{4}}} H_n(\tilde{p}|q), \end{aligned}$$

где

$$\tilde{x} = x \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(1-q)}, \quad \tilde{p} = p \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(1-q)}.$$

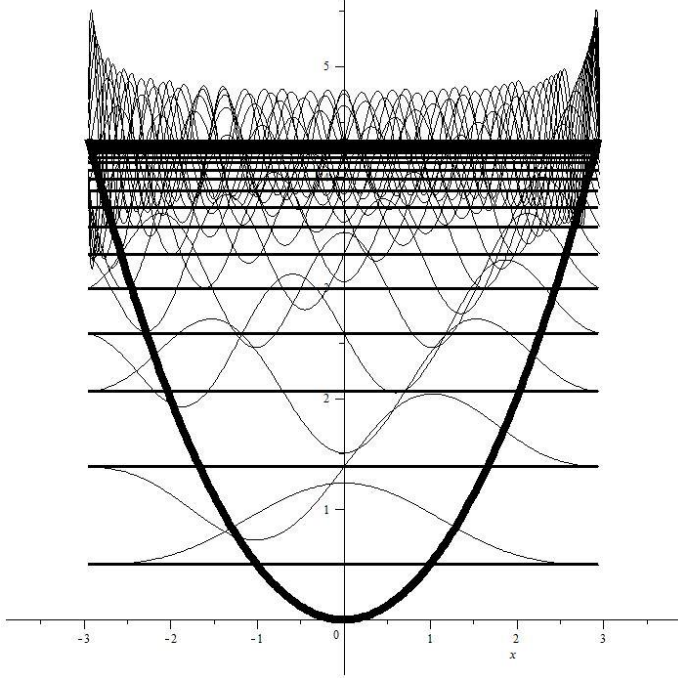


Рисунок 3. Сравнительная картина потенциала под конфайнментом, волновых функций и энергетического спектра при $q=0.77$.

§4.2 содержит в себе общую информацию о функции распределения квазивероятности Хусими в квантовом подходе:

$$F_H(p, x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \hbar \Delta_x} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y) e^{\frac{-ipy}{\hbar} - \frac{(x-y)^2}{24}} dy \right|^2.$$

§4.3 посвящен определению q -деформированного квантового гармонического осциллятора, и суперпозиции из его четырех стационарных состояний. Здесь, также представлено вычисление функции Хусими для такой суперпозиции:

$$F_{x,n}^H(p, x) = F^{NN}(p, x) + (-1)^n F^{NS}(p, x) + i^{-n} F^{NE}(p, x) + i^n F^{NW}(p, x) + (-1)^n F^{SN}(p, x) + F^{SS}(p, x) + i^n F^{SE}(p, x) + i^{-n} F^{SW}(p, x) + i^n F^{EN}(p, x) + i^{-n} F^{ES}(p, x) + F^{EE}(p, x) +$$

$$(-1)^n F^{EW}(p, x) + i^{-n} F^{WN}(p, x) + i^n F^{WS}(p, x) + (-1)^n F^{WE}(p, x) + F^{WW}(p, x),$$

где указанные компоненты явно задаются как

$$\begin{aligned} F^{NN}(p, x) &= F^{SS}(p, -x) = \gamma_n(p, x) \left(e^{-ia/2}; q \right)_n \left(e^{ia^*/2}; q \right)_n, \\ F^{SN}(p, x) &= F^{NS}(-p, -x) = \gamma_n(p, x) \left(e^{-ia/2}; q \right)_n \left(e^{ia^*/2}; q \right)_n, \\ F^{ES}(p, x) &= F^{NE}(p, -x) = \gamma_n(p, x) \left(e^{a/2}; q \right)_n \left(e^{-ia^*/2}; q \right)_n, \\ F^{SE}(p, x) &= F^{EN}(p, -x) = \gamma_n(p, x) \left(e^{ia/2}; q \right)_n \left(e^{a^*/2}; q \right)_n, \\ F^{EE}(p, x) &= F^{WW}(-p, -x) = \gamma_n(p, x) \left(e^{a/2}; q \right)_n \left(e^{a^*/2}; q \right)_n, \\ F^{EW}(p, x) &= F^{WE}(p, -x) = \gamma_n(p, x) \left(e^{a/2}; q \right)_n \left(e^{-a^*/2}; q \right)_n, \\ F^{WS}(p, x) &= F^{NW}(p, -x) = \gamma_n(p, x) \left(e^{-a/2}; q \right)_n \left(e^{-ia^*/2}; q \right)_n, \\ F^{SW}(p, x) &= F^{WN}(p, -x) = \gamma_n(p, x) \left(e^{ia/2}; q \right)_n \left(e^{-a^*/2}; q \right)_n, \end{aligned}$$

с $a = \frac{k}{\hbar} p + 2i\lambda k x$ и общим делителем $\gamma_n(p, x)$ для всех 16 компонентов, равным

$$\gamma_n(p, x) = \frac{N_q^2}{8\pi\hbar} \frac{q^n}{(q; q)_n} e^{-\frac{1}{\hbar\omega} \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \frac{p^2}{2m}}.$$

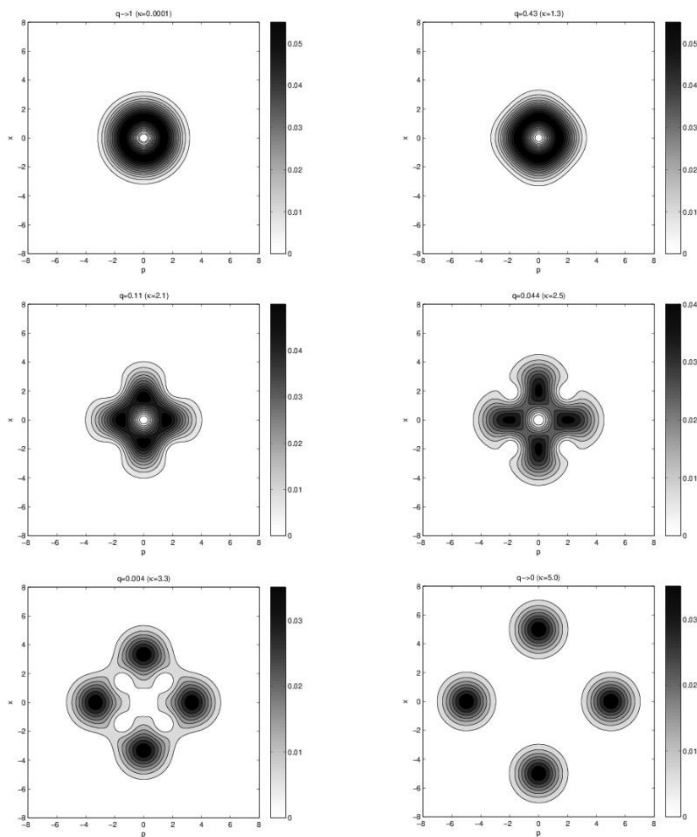


Рисунок 4. Плотность функции Хусими для однофотонных состояний ($n = 1$), для $\kappa = 0.0001, 1.3, 2.1, 2.5, 3.3, 5.0$ и $m=\omega=\hbar=1$

В §4.4 детально обсуждены полученные результаты как для модели конфайнментного осциллятора в конфигурационном пространстве, так и вычисленный явный вид функции Хусими для предложенной суперпозиции волновых функций q -деформированной модели квантового гармонического осциллятора.

В **Заключении** кратко сформулированы основные результаты диссертационной работы.

Основные выводы и положения, выносимые на защиту:

1. Построена дискретная модель линейного квантового гармонического осциллятора в неэквидистантном конечном конфигурационном представлении в терминах многочленов Кравчука с динамической симметрией так называемой CP -деформации алгебры Ли $su(2)$, найден явный вид спектра энергии, вычислены частные случаи и точные пределы;

2. Построена дискретная модель линейного квантового гармонического осциллятора в бесконечном эквидистантном конфигурационном представлении в терминах многочленов Мейкснера с динамической симметрией группы Лоренца $SO(2,1)$ и вычислены ее основные физические характеристики;

3. Построена конфайнментная модель линейного квантового гармонического осциллятора в конечно-непрерывном конфигурационном представлении, волновые функции стационарных состояний которой выражаются с помощью непрерывных многочленов q -Эрмита;

4. Построено фазовое представление q -деформированного гармонического осциллятора и найдены точные выражения функции Хусими для суперпозиции его волновых функций в терминах многочленов Роджерса-Сего.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Jafarov E.I., Jafarova A.M., Van der Jeugt J., **Spin chains with the modified Racah nearest-neighbour interaction: qubit transfer with high fidelity** // *Book of Abstract of Asia-Pacific Conference & Workshop on Quantum Information Science*, Seoul, South Korea, p.73-74, (2013)
2. Atakishiyev N.M., Jafarov E.I., A.M.Jafarova, Van der Jeugt J., **On a pair of difference equations for the Wilson polynomials** // *Proceedings of the International Conference «On actual problems of mathematics and informatics» dedicated to the 90th anniversary of Haydar Aliyev*, p.17-18, (2013)
3. Jafarova A.M., Imranov F.B., **Quantum dissipative harmonic oscillator** // *Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics*, vol. XXXIX (XLVII), p.157-164, (2013)
4. Atakishiyev N.M., Jafarov E.I., Jafarova A.M., Van der Jeugt J., **The Husimi distribution function and superposition of q-harmonic oscillator stationary states** // *Transactions of ANAS*, vol XXXIV, No 1, p.147-156, (2014)
5. Jafarov E.I., Jafarova A.M., Van der Jeugt J., **su(2) Krawtchouk oscillator model under the CP deformed symmetry** // *Book of abstracts of XXXII International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics*, Ghent, Belgium, 14-18 July, 2014, p. 85
6. Atakishiyev N.M., Jafarova A.M., Jafarov E.I., **Meixner Polynomials and Representations of the 3D Lorentz group SO(2,1)** // *Communications in Mathematical Analysis (USA)*, 17, N2, 14–23 (2014)
7. Jafarov E.I., Jafarova A.M., Van der Jeugt J., **The su(2) Krawtchouk oscillator model under the CP deformed symmetry** // *Journal of Physics: Conference Series (UK)* 597 (2015) 012047
8. Jafarov E.I., Jafarova A.M., Oste R., **Exactly solvable model of the one-dimensional confined harmonic oscillator** // *Transactions of ANAS*, vol. XXXVI, No 4, 122-130 (2016)

AYNURA MAMEDRZA GIZI JAFAROVA

**SOLUTION OF THE DIFFERENCE EQUATIONS
FOR DEFORMED QUANTUM SYSTEMS**

ABSTRACT

Main goal of presented dissertation work is formulation and detailed study of so-called deformed quantum systems, which generalize quantum harmonic oscillator problem. In the framework of performed research, such problems as obtaining of spectrum of Hamiltonian and analytical expressions of its wavefunctions as solutions of certain difference equations are considered. Other physical properties of deformed quantum systems under consideration, such as Husimi quantum distribution function and dynamical symmetry algebra are also explicitly obtained.

In the framework of performed research, the following main results are achieved:

The discrete model of the linear quantum harmonic oscillator with so-called CP -deformed $su(2)$ Lie algebra dynamical symmetry in the non-equidistant finite configuration representation is constructed and thoroughly studied in terms of the Krawtchouk polynomials;

The discrete model of the linear quantum harmonic oscillator with $SO(2,1)$ Lorentz group dynamical symmetry in the equidistant infinite configuration representation is constructed and thoroughly studied in terms of the Meixner polynomials;

The confinement model of the linear quantum harmonic oscillator in the finite-continuous configuration representation with wavefunctions of the stationary states expressed through the continuous q -Hermite polynomials is constructed;

The phase space of the q -deformed harmonic oscillator is constructed and explicit expression of Husimi function is obtained for superposition of its wavefunctions written down in terms of the Rogers-Szego polynomials.

AYNURƏ MƏMMƏDRZA QIZI CƏFƏROVA

**DEFORMASIYA OLUNMUŞ KVANT SİSTEMLƏRİNİN
FƏRQ TƏNLİKLƏRİNİN HƏLLİ**

XÜLASƏ

Dissertasiya işinin əsas məqsədi kvant harmonik ossilyatoru məsələsini ümumiləşdirən deformasiya olunmuş kvant sistemlərinin səlis ifadə olunması və hərtərəfli öyrənilməsidir. Aparılan tədqiqat nəticəsində, Hamilton operatorunun spektrinin və müəyyən fərq tənliklərinin həlli olan dalğa funksiyalarının dəqiq ifadələrinin alınması kimi məsələlər həll edilmişdir. Baxılan deformasiya olunmuş kvant sistemlərinin Husimi paylanma funksiyasının və dinamik simmetriya cəbrinin tapılması kimi fiziki xassələri də öyrənilmişdir.

Həyata keçirilən tədqiqat nəticəsində, aşağıdakı əsas nəticələr əldə edilmişdir:

Qeyri-ekvidistant sonlu konfigurasiya fəzasında, dinamik simmetriyası CP -deformasiya olunmuş $su(2)$ Li cəbri olan və uyğun dalğa funksiyaları Kravçuk çoxhədliləri ilə ifadə olunan xətti harmonik ossilyatorun diskret modeli qurulmuş və hərtərəfli tədqiq edilmişdir;

Ekvidistant sonsuz-diskret konfigurasiya fəzasında dinamik simmetriya qrupu $SO(2,1)$ Lorens qrupu olan və stasionar hallarının dalğa funksiyaları Meyksner çoxhədliləri ilə ifadə olunan kvant xətti harmonik ossilyatorunun diskret modeli qurulmuş və geniş tədqiq edilmişdir;

Sonlu-kəsilməz konfigurasiya təsvirində, stasionar hallarının dalğa funksiyaları kəsilməz q -Ermit çoxhədliləri ilə ifadə edilən kvant xətti harmonik ossilyatorunun konfaynment modeli qurulmuşdur;

q -deformasiya olunmuş harmonik ossilyatorun faza fəzası qurulmuş və onun Rocers-Szeqo çoxhədliləri ilə ifadə olunan dalğa funksiyalarının superpozisiyası üçün Husimi paylanma funksiyasının aşkar ifadəsi tapılmışdır.



Sifariş № 41. Tirajı 100 nüsxə

Azərbaycan MEA Geologiya və Geofizika İnstitutu
«Nafta-Press» nəşriyyatı
Bakı, H.Cavid pr. 119, Tel.: 539-39-72

Əlyazması hüququnda

AYNURƏ MƏMMƏDRZA QIZI CƏFƏROVA

**DEFORMASIYA OLUNMUŞ KVANT SİSTEMLƏRİNİN
FƏRQ TƏNLİKLƏRİNİN HƏLLİ**

2212.01 – Nəzəri fizika

Fizika üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsinin alınması üçün
təqdim olunmuş dissertasiya işinin

A V T O R E F E R A T I

BAKİ – 2016