

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

На правах рукописи

НАЗАРОВА ВЕРА БОРИСОВНА

**ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО
УПРАВЛЕНИЯ В СИСТЕМАХ С ЧАСТНЫМИ
ПРОИЗВОДНЫМИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА**

1211.01 – Дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

**диссертации на соискание учёной степени
доктора философии по математике**

Баку - 2016

Работа выполнена на кафедре «Дифференциальные и интегральные уравнения» Бакинского Государственного Университета.

Научный руководитель: Доктор физико-математических наук, профессор **Г.Ф.Кулиев**

Официальные оппоненты: Доктор физико-математических наук, профессор **А.Б.Алиев**

Доктор математических наук, профессор **Я.А.Шарифов**

Ведущая организация: Сумгаитский Государственный Университет, кафедра «Математический анализ и теория функций»

Защита диссертации состоится « 29 » ноября 2016 г. в 14⁰⁰ часов на заседании Диссертационного Совета FD.02.016 при Бакинском Государственном Университете.

Адрес: АЗ 1148, Баку, ул.З.Халилова, 23.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Бакинского Государственного Университета.

Автореферат разослан « 27 » октября 2016 года.

**Учёный секретарь
Диссертационного Совета
FD 02.016, д.м.н., профессор**

Н.К.Ахмедов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Задачи управления для систем с распределенными параметрами или с уравнениями в частных производных являются одной из важных и объемных разделов теории управления. Как известно, задачи управления для уравнений с частными производными второго порядка изучены более подробно в сравнении с задачами управления для уравнений четвертого порядка.

Отметим, что большое число задач о поперечных колебаниях стержней, пластин, задачи, связанные с изгибно-крутильными колебаниями стержней (имеющих большое значение в динамике самолетных конструкций), задачи о собственных колебаниях камертона, задачи о колебаниях устойчивости вращающихся валов, задачи о вибрации кораблей и т.д. приводят к гиперболическим уравнениям четвертого порядка. Поэтому исследование задач управления, описываемых такими уравнениями имеют большое значение. Надо отметить, что управление в процессах, описываемых гиперболическими уравнениями по сравнению с процессами, описываемыми эллиптическими и параболическими уравнениями являются более сложными. Это прежде всего связано со сложностью теории решения гиперболических уравнений. Поэтому, в задачах управления, связанных с гиперболическими уравнениями четвертого порядка исследование существования оптимального управления, вывод необходимых условий оптимальности, задачи управляемости и т.д. значительно усложняется.

Впервые задача оптимального управления для колеблющихся стержней рассмотрена в работе В.Комкова. Далее различные задачи теории управления для процессов, описываемых гиперболическими уравнениями четвертого порядка изучены в работах Ж.Л.Лионса, А.И.Егорова, Т.К.Сиразетдинова, Г.Ф.Кулиева, А.А.Мехтиева и др. В книге В.Комкова для линейных уравнений колебаний стержня с квадратичным функционалом получается аналог принципа максимума Понтрягина. Здесь за критерий качества берется полная энергия стержня. В книге Ж.Л.Лионса изучается одна задача оптимального управления для линейного уравнения типа Петровского с распределенным управлением и квадратичным функционалом, получается необходимое и достаточное условие оптимальности в виде вариационного неравенства. Отметим,

что частным случаем рассмотренного уравнения является уравнение поперечных колебаний стержня. В книге А.И.Егорова (Основы теории управления) рассматривается задача полного гашения колебаний стержня за конечное время с помощью граничных управлений в одном простом случае. В книге Т.К.Сиразетдинова показывается, что различные задачи управления колебаниями стержня имеют многочисленные приложения, например, в задаче управления упругими летательными аппаратами и в одном частном случае оптимальное управление находится как решение задачи синтеза. В работе Г.Ф.Кулиева и А.А.Мехтиева для уравнения колебаний стержня изучена задача оптимального быстрогодействия, а в работе А.А.Мехтиева исследована задача об оптимальных скользящих режимах для уравнения колебаний стержня.

Предлагаемая диссертация посвящена исследованию задачи управляемости связанной с линейными гиперболическими уравнениями четвертого порядка, доказательству теорем существования оптимального управления с управлением в правой части линейных и слабо нелинейных уравнений поперечных колебаний стержня, связанных изгибно-крутильными колебаниями стержня, выводу формулы градиента функционала, выводу различных необходимых условий оптимальности.

Отметим, что теоремы существования оптимального управления, доказанные в диссертации обосновывают содержательность полученных необходимых условий и дают возможность применить эти необходимые условия к решению прикладных задач.

Как в выше перечисленных работах, так и в предлагаемой диссертации, рассматриваемые задачи существенно отличаются друг от друга, присущими только им, особенностями. Поэтому тема диссертационной работы является актуальной.

Цель работы. Целью работы является

- исследование задач управляемости;
- исследовать разрешимость краевой задачи для слабо нелинейных уравнений связанными изгибно-крутильными колебаниями стержня;

- построить решение задач управляемости в виде ряда в случае граничного управления для уравнения поперечных колебаний стержня;
- доказать существование оптимальных управлений с управлениями в правой части линейных или слабо нелинейных уравнений для поперечных и связанных изгибно- крутильных колебаний стержня;
- вывести различные необходимые условия оптимальности.

Общая методика исследований.

В диссертационной работе использованы методы функционального анализа, метод проблемы моментов, метод Фурье, метод Галеркина, методы математической теории оптимального управления.

Научная новизна.

- построено решение задач управляемости в виде ряда в случае граничного управления для уравнения поперечных колебаний стержня;
- построено решение задач управляемости в виде ряда с помощью граничных управлений в отрезке произвольной длины;
- решена задача оптимального быстрогодействия для уравнения поперечных колебаний стержня с распределенным управлением, причем решение задачи найдено в виде ряда;
- исследована разрешимость краевой задачи для слабо нелинейных уравнений связанными изгибно- крутильными колебаниями стержня;
- найдено решение задач оптимального управления для уравнения поперечных колебаний стержня с применением проблемы моментов;
- доказано существование оптимального управления для слабо нелинейных уравнений связанными изгибно- крутильными колебаниями стержня;
- выведено необходимое и достаточное условие оптимальности в задаче оптимального управления связанными изгибно- крутильными колебаниями стержня в случае линейных уравнений;
- выведено необходимое условие оптимальности в виде принципа максимума Понтрягина в задаче оптимального

управления для слабо нелинейных уравнений изгибно- крутильных колебаний стержня.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные в работе результаты носят, в основном, теоретический характер. Используемая в работе схема, может быть применена для исследования задач оптимального управления в системах, описываемых другими уравнениями четвертого порядка. Кроме этого, практическая ценность задач, рассматриваемых в работе состоит из того, что полученные в работе результаты могут быть использованы для приближенных решений задач управления в различных колебательных и волновых процессах.

Апробации работы. Результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры «Дифференциальные и интегральные уравнения» (рук., проф. Н.Ш.Искендеров) и «Математические методы теории управления» (рук., проф. М.А.Ягубов) БГУ, в Институте прикладной математики БГУ (рук., акад. Ф.А.Алиев), на республиканской научной конференции «Актуальные проблемы математики и механики» студентов, магистров и молодых исследователей. (Баку 2012), на IV-ой международной научной конференции «Problems of cybernetics and informatics» (Баку 2012), на республиканской научной конференции, посвященной 50-летию кафедры «Вычислительная математика» (Баку 2012).

Публикация. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 110 страницах, состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 76 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава работы, состоящая из двух разделов, посвящена задачам управляемости для поперечных колебаний стержня.

В разделе 1.1 рассматривается следующая задача:

Пусть управляемый процесс в прямоугольнике $Q = \{0 < x < 1, 0 < t < T\}$ описывается краевой задачей:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2)$$

$$u(0, t) = \mu_0(t), \quad \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} = \mu_2(t), \quad 0 < t < T, \quad (3)$$

$$u(1, t) = \nu_0(t), \quad \frac{\partial^2 u(1, t)}{\partial x^2} = \nu_2(t), \quad 0 < t < T. \quad (4)$$

Здесь предполагается, что данные задачи (1)-(4) удовлетворяют условиям:

$\varphi \in W_2^3[0, 1], \quad \psi \in W_2^1[0, 1], \quad \mu_0 \in W_2^2[0, T], \quad \nu_0 \in W_2^2[0, T],$
 $\mu_2 \in W_2^1[0, T], \quad \nu_2 \in W_2^1[0, T],$ а также условиям согласования:
 $\mu_0(0) = \varphi(0) = 0, \quad \nu_0(0) = \varphi(1) = 0, \quad \mu_0'(0) = \psi(0) = 0,$
 $\nu_0'(0) = \psi(1) = 0, \quad \mu_2(0) = \varphi''(0) = 0, \quad \nu_2(0) = \varphi''(1) = 0,$ причем
 $(\mu_0(t), \nu_0(t), \mu_2(t), \nu_2(t))$ является управлением.

За класс допустимых управлений берется множество

$$U = \{(\mu_0(t), \nu_0(t), \mu_2(t), \nu_2(t)) \in W_2^2[0, T] \times W_2^2[0, T] \times W_2^1[0, T] \times W_2^1[0, T]\}$$

Под решением задачи (1)-(4), соответствующим допустимому управлению $(\mu_0(t), \nu_0(t), \mu_2(t), \nu_2(t)) \in U$ будем понимать функцию $u(x, t)$ из $C([0, T]; W_2^2(0, 1), L_2(0, 1))$, удовлетворяющую первым условиям (2), (3), (4) в смысле равенства соответствующих следов и интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \iint_Q \left[-\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right] dx dt - \int_0^1 \psi(x) \eta(x, 0) dx - \int_0^T \nu_2(t) \frac{\partial \eta(1, t)}{\partial x} dt + \\ + \int_0^T \mu_2(t) \frac{\partial \eta(0, t)}{\partial x} dt = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

при всех

$\eta = \eta(x, t) \in C([0, T]; W_2^2(0, 1), L_2(0, 1)), \eta(0, t) = \eta(1, t) = 0, \eta(x, T) = 0,$
где $C([0, T]; W_2^2(0, 1), L_2(0, 1))$ - банахово пространство, состоящее из элементов $C([0, T]; L_2(0, 1))$, имеющих обобщенные производные $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ также из $C([0, T]; L_2(0, 1))$.

Предположим, что при каждом управлении $(\mu_0(t), \nu_0(t), \mu_2(t), \nu_2(t)) \in U$ решение задачи (1)-(4) существует и единственно в классе $C([0, T]; W_2^2(0, 1), L_2(0, 1))$.

Ставится задача: требуется определить момент времени $T > 0$ и соответствующие ему управляющие функции $\mu_k(t)$ и $\nu_k(t), k = 0, 2$, такие, чтобы определяемое ими решение $u(x, t)$ краевой задачи (1)-(4) удовлетворяло условиям

$$u(x, T) \equiv 0, \quad \frac{\partial u(x, T)}{\partial t} \equiv 0, \quad 0 < x < 1. \quad (6)$$

Доказана

Теорема 1. В рассматриваемой задаче управления колебаниями стержня с помощью граничных управляющих функций начальные возмущения можно погасить за конечное время $T = \frac{1}{\pi}$,

полагая $\mu_0(t) \equiv 0, \nu_2(t) \equiv 0, \mu_2(t) = \mu_2^0(t), \nu_2(t) = \nu_0^0(t)$,

где $\mu_2^0(t)$ и $\nu_0^0(t)$ определяются формулами

$$\mu_2^0(t) = \frac{1}{2} \left[- \sum_{n=1}^{\infty} n \pi^2 \varphi_n \sin n^2 \pi^2 t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n} \psi_n \cos n^2 \pi^2 t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n} \psi_n \right] \quad (7)$$

$$\nu_0^0(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_{0n^2} \sin n^2 \pi^2 t, \quad (8)$$

где

$$\varphi_n = 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin \pi n x dx, \quad \psi_n = 2 \int_0^1 \psi(x) \sin \pi n x dx,$$

$$v_{0n^2} = \frac{1}{(\pi n)^2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\pi \psi_k}{k} \alpha_{nk} + \frac{(-1)^{n+1} n \pi^2 \varphi_n}{2} + \frac{1}{n^2} \left[(-1)^{n^2} - 1 \right] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k}{k} \right],$$

где

$$\alpha_{nk} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{n^2 + k^2} \left((-1)^{n^2 + k^2} - 1 \right) + \frac{1}{n^2 - k^2} \left((-1)^{n^2 - k^2} - 1 \right) \right], & k \neq n, \\ 0, & k = n. \end{cases}$$

В разделе 1.2 диссертации изучается следующая краевая задача:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, (x, t) \in Q, \quad (9)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), 0 < x < l, \quad (10)$$

$$u(0, t) = \mu_0(t), \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} = \mu_2(t), 0 < t < T, \quad (11)$$

$$u(l, t) = v_0(t), \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial x^2} = v_2(t), 0 < t < T. \quad (12)$$

Здесь предполагается, что данные задачи (9)-(12) удовлетворяют условиям: $\varphi \in W_2^3[0, l]$, $\psi \in W_2^1[0, l]$, $\mu_0 \in W_2^2[0, T]$, $v_0 \in W_2^2[0, T]$, $\mu_2 \in W_2^1[0, T]$, $v_2 \in W_2^1[0, T]$, а также условиям согласования: $\mu_0(0) = \varphi(0) = 0$, $v_0(0) = \varphi(l) = 0$, $\mu_0'(0) = \psi(0) = 0$, $v_0'(0) = \psi(l) = 0$, $\mu_2(0) = \varphi''(0) = 0$, $v_2(0) = \varphi''(l) = 0$, причем $(\mu_0(t), v_0(t), \mu_2(t), v_2(t))$ является управлением.

За класс допустимых управлений берется множество

$$U = \{(\mu_0(t), v_0(t), \mu_2(t), v_2(t)) \mid (\mu_0(t), v_0(t), \mu_2(t), v_2(t)) \in W_2^2[0, T] \times W_2^2[0, T] \times W_2^1[0, T] \times W_2^1[0, T]\}$$

Рассматривается задача управления: требуется определить момент времени $T > 0$ и соответствующие ему управляющие функции и $\mu_k(t)$ и $v_k(t)$, $k = 0, 2$, такие, чтобы определяемое

ими решение $u(x, t)$ краевой задачи (9)-(12) удовлетворяло условиям

$$u(x, T) \equiv 0, \frac{\partial u(x, T)}{\partial t} \equiv 0, 0 < x < l. \quad (13)$$

в этом разделе доказывается

Теорема 2. В рассматриваемой задаче управления колебаниями стержня с помощью граничных управляющих функций, начальные возмущения можно погасить за конечное время $T = \frac{al^2}{\pi}$,

полагая $\mu_2(t) \equiv 0, v_0(t) \equiv 0, \mu_0(t) = \mu_0^0(t), v_2(t) = v_2^0(t)$, где $v_2^0(t)$

и $\mu_0^0(t)$ определяются формулами

$$\mu_0^0(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{l^2}{(1+l^2)(\pi n)^2} (-1)^{n+1} n \pi^2 \varphi_n + \frac{2l}{(\pi n)^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k \pi^2 \psi_k \alpha_{nk} \right] \sin \frac{n^2 \pi t}{l} \left(1 - \frac{\pi t}{al} \right), \quad (14)$$

$$v_2^0(t) = \frac{1}{l^2(1+l^2)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \pi^2 \varphi_n \sin \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \frac{t}{a} + \frac{l\pi}{1+l^2} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\psi_n}{n} \left[\cos \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \frac{t}{a} - 1 \right] + \frac{l\pi}{1+l^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\psi_n}{n}, \quad (15)$$

где $\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \pi n x dx$, $\psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \pi n x dx$.

Вторая глава диссертации, состоящая из трех разделов, посвящена доказательству существования оптимального управления в задаче оптимального управления для линейного и слабо нелинейных уравнений связанными изгибно- крутильными колебаниями стержня и применению метода проблемы моментов к решению задачи оптимального управления для уравнения поперечных колебаний стержня.

В разделе 2.1 рассматривается задача оптимального по быстродействию управления процессом, который описывается уравнением колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = v(x, t), \quad (x, t) \in Q = \{0 < x < l; 0 < t < T\}, \quad (16)$$

с граничными

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (17)$$

и начальными условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (18)$$

где $u(x, t)$ – состояние процесса, $v(x, t)$ управляющая функция из $L_2(Q)$. За класс допустимых управлений берем шар $\|v\|_{L_2(Q)} \leq R$, $R > 0$ – где заданное число. Предположим, что $u_0 \in W_{2,0}^2(0, l)$, $u_1 \in L_2(0, l)$. При этих условиях для каждого фиксированного допустимого управления v задача (16)-(18) имеет единственное обобщенное решение $u(x, t)$ из $C(0, T; W_{2,0}^2(0, l), L_2(0, l))$.

Ставится задача оптимального управления: найти такое допустимое управление $v(x, t)$ из шара $\|v\|_{L_2(Q)} \leq R$, которое переводит систему (16), (17) из заданного начального состояния (18) в конечное нулевое состояние за наименьшее время T , т.е. за минимальное время удовлетворяются условия

$$u(x, t)|_{t=T} = 0, \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}|_{t=T} = 0. \quad (19)$$

Доказывается

Теорема 3. Пусть выполняются условия: $u_0 \in W_{2,0}^2(0, l)$, $u_1 \in L_2(0, l)$. Тогда решение задачи оптимального быстродействия в шаре $\|v\|_{L_2(Q)} \leq R$ для смешанной задачи (16)-(18) представляется в виде

$$v^0(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \int_0^l \psi_{ji}^0 \sin \frac{i\pi}{l} \xi K_j(x, t, \xi, T) d\xi,$$

где ψ_{ji}^0 ($j=1, 2$) определяется формулами

$$\psi_{1i}^0 = \frac{16T\alpha_{1i}\lambda_i^2 + 8\lambda_i\sqrt{\lambda_i}\alpha_{1i}\sin 2\sqrt{\lambda_i}T - 8\lambda_i\alpha_{2i}(1 - \cos 2\sqrt{\lambda_i}T)}{l^2(2T^2\lambda_i - (1 - \cos 2\sqrt{\lambda_i}T))},$$

$$\psi_{2i}^0 = \frac{16T\lambda_i\alpha_{2i} - 8\sqrt{\lambda_i}\alpha_{2i}\sin 2\sqrt{\lambda_i}T - 8\lambda_i\alpha_{1i}(1 - \cos 2\sqrt{\lambda_i}T)}{l^2(2T^2\lambda_i - (1 - \cos 2\sqrt{\lambda_i}T))},$$

$i = 1, 2, \dots$

а наименьший положительный корень уравнения

$$\frac{l}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[(\psi_{1i}^0)^2 \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{4\sqrt{\lambda_i}} \sin 2\sqrt{\lambda_i}T \right) + 2\psi_{1i}^0\psi_{2i}^0 \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2\sqrt{\lambda_i}T \right) + (\psi_{2i}^0)^2 \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{4\sqrt{\lambda_i}} \sin 2\sqrt{\lambda_i}T \right) \right] = R^2$$

дает время оптимального быстродействия.

В разделе 2.2 метод проблемы моментов применяется к решению задачи оптимального управления для уравнения поперечных колебаний стержня с одним граничным управлением, а именно рассматривается краевая задача для уравнения колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad (x, t) \in Q = \{0 < x < l; 0 < t < T\}, \quad (20)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad x \in [0, l], \quad (21)$$

$$u(0, t) = v(t), \quad u(l, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial x^2} = 0, \quad t \in [0, T], \quad (22)$$

где $\varphi \in W_2^3[0, l]$, $\psi \in W_2^1[0, l]$ – заданные функции, причем $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$, а $v(t)$ – граничное управление из $W_2^2[0, T]$ и выполняются условия $v(0) = 0, v'(0) = 0$.

Ставится следующая задача: найти такое управление $v(t)$, определенное на $[0, T]$, что квадрат нормы $\|v\|^2$ которого был бы наименьшим, и в момент T времени выполнялись условия

$$u(x, T) = 0, \quad \frac{\partial u(x, T)}{\partial t} = 0.$$

Применяя метод Фурье находится решение краевой задачи (20)-(22). Далее, условия отсутствия колебаний стержня в момент времени T приводится к нахождению функции $v(t)$ из моментных соотношений

$$\begin{cases} \int_0^T v(\tau) \cos\left(\frac{\pi n}{l}\right) \tau d\tau = \frac{\psi_n}{\alpha_n} \left(\frac{l}{\pi n}\right)^2, \\ \int_0^T v(\tau) \sin\left(\frac{\pi n}{l}\right) \tau d\tau = -\frac{\varphi_n}{\alpha_n}, n = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (23)$$

где φ_n, ψ_n коэффициенты Фурье функции $\varphi(x), \psi(x)$.

Таким образом, нахождение решения поставленной задачи оптимального управления сводится к нахождению такого управления $v(t)$, которое доставляет минимум функционалу $\|v\|_{L_2(0,T)}^2$ и для него удовлетворяется система уравнений (23), т.е. определение $v(t)$ сводится к проблеме моментов.

В этом разделе доказана

Теорема 4. При выше приведенных условиях поставленная задача оптимального управления имеет решение в виде ряда

$$v^0(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left[-\frac{\varphi_m}{\alpha_m} \sin(m^2 t) + \frac{\psi_m}{\alpha_m m^2} \cos(m^2 t) \right], \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

причем
$$\min \|v\|_{L_2(0,2\pi)}^2 = \|v^0\|_{L_2(0,2\pi)}^2 = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m^2} \left(\varphi_m^2 + \frac{\psi_m^2}{m^4} \right)$$

и $v^0 \in W_2^2(0, 2\pi)$.

В разделе 2.3 второй главы рассматривается задача оптимального управления для слабо нелинейных уравнений связанными изгибно - крутильными колебаниями стержня, а именно колебания стержня, описываемые системой двух дифференциальных уравнений в области $Q = \{0 < x < l, 0 < t < T\}$

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \rho A e \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = f_1(x, t, y, \theta, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial x}, v), \quad (24)$$

$$\begin{aligned} EC_{\omega} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - GC \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \rho A e \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \rho(I + Ae^2) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \\ = f_2(x, t, y, \theta, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial x}, v) \end{aligned} \quad (25)$$

с начальными условиями

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = y_1(x),$$

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad \frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial t} = \theta_1(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (26)$$

и граничными условиями

$$y(0, t) = 0, y(l, t) = 0, \frac{\partial y(0, t)}{\partial x} = 0, \frac{\partial y(l, t)}{\partial x} = 0, \quad (27)$$

$$\theta(0, t) = 0, \theta(l, t) = 0, \frac{\partial \theta(0, t)}{\partial x} = 0, \frac{\partial \theta(l, t)}{\partial x} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (28)$$

где $l > 0, T > 0$ - заданные числа, $y(x, t)$ - поперечное перемещение стержня, $\theta(x, t)$ - угол поворота поперечного сечения стержня, E - модуль Юнга, I - полярный момент инерции поперечного сечения относительно его центра тяжести, ρ - плотность материала стержня, A - площадь поперечного сечения, e - расстояние от центра тяжести до центра кручения, C_{ω} - секториальный момент инерции поперечного сечения, G - модуль сдвига, C - геометрическая жесткость свободного кручения, EC_{ω} - жесткость изгибного кручения, GC - жесткость свободного кручения, $v(x, t)$ - управляющая функция. За класс допустимых управлений U берем множество измеримых и ограниченных на Q функций

$v(x, t)$, таких, что почти при всех $(x, t) \in Q$ значения этих функций принадлежат отрезку $[\alpha, \beta]$, где α, β - заданные числа.

Ставится следующая задача: найти такое допустимое управление $v(x, t)$ из U , которое вместе с соответствующим решением $(y(x, t), \theta(x, t))$ задачи (24)-(26) доставляет минимум функционалу

$$J(v) = \iint_Q f_0 \left(x, t, y(x, t), \theta(x, t), \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}, \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x}, v(x, t) \right) dx dt. \quad (29)$$

Задачу оптимального управления (24)-(29) назовем просто задачей (24)-(29). Пусть выполняются следующие условия:

$$1. y_0 \in \overset{0}{W}_2^2(0, l), y_1 \in L_2(0, l), \theta_0 \in \overset{0}{W}_2^2(0, l), \theta_1 \in L_2(0, l);$$

2. Функции $f_i(x, t, y, \theta, p, q, v), i = 0, 1, 2$ непрерывны на $\bar{Q} \times R^4 \times [\alpha, \beta]$. Функции $f_i(x, t, y, \theta, p, q, v), i = 1, 2$ по (y, θ, p, q) удовлетворяют условию Липшица равномерно относительно $(x, t) \in \bar{Q}$ и $v \in [\alpha, \beta]$; функция $f_0(x, t, y, \theta, p, q, v)$ удовлетворяет условию роста $|f_0(x, t, y, \theta, p, q, v)| \leq a_0 + b_0(|y|^2 + |\theta|^2 + |p|^2 + |q|^2)$, где $a_0, b_0 = \text{const} > 0$;

3. Для каждой точки $(x, t, y, \theta, p, q) \in \bar{Q} \times R^4$ множество $R^+(x, t, y, \theta, p, q) = \{(\eta, \xi_1, \xi_2) \in R^3 | \eta \geq f_0(x, t, y, \theta, p, q, v), \xi_1 = f_1(x, t, y, \theta, p, q, v), \xi_2 = f_2(x, t, y, \theta, p, q, v), v \in [\alpha, \beta]\}$ замкнуто и выпукло в R^3 .

Эти условия назовем «условие А». Доказывается

Теорема 5. При выполнении первых двух условий «условие А» краевая задача (24)-(28) для каждого $v(x, t) \in U$ имеет единственное решение.

Далее доказывается

Теорема 6. Пусть выполняется «условие А». Тогда в задаче (24)-(29) существует оптимальное управление.

Третья глава диссертации, состоящая из двух разделов, посвящена выводу необходимых условий оптимальности в задачах управления для колебаний стержня.

В разделе 3.1 рассматривается задача оптимального управления для линейных уравнений с квадратичным функционалом: пусть требуется минимизировать функционал

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^l ([y(x, T; v) - y_0(x)]^2 + [\theta(x, T; v) - \theta_0(x)]^2) dx + \frac{\alpha}{2} \iint_Q (v_1^2(x, t) + v_2^2(x, t)) dx dt \quad (\alpha = \text{const} > 0) \quad (30)$$

при ограничениях

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \rho A e \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = v_1(x, t), \quad (31)$$

$$EC_\omega \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - GC \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \rho A e \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \rho(I + Ae^2) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = v_2(x, t), \quad (32)$$

($E, I, \rho, A, e, C_\omega, G, C$ - постоянные).

Пусть стержень зашкреплен. Тогда при $x = 0$ и $x = l$ имеем граничные условия

$$y(0, t) = 0, y(l, t) = 0, \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \quad (33)$$

$$\theta(0, t) = 0, \theta(l, t) = 0, \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0. \quad (34)$$

Зададим начальные условия

$$y(x, 0) = \varphi_0(x), \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad (35)$$

$$\theta(x, 0) = g_0(x), \frac{\partial \theta}{\partial t} \Big|_{t=0} = g_1(x). \quad (36)$$

За класс допустимых управлений берем заданное выпуклое множество $U \subseteq L_2(Q) \times L_2(Q)$.

В этом разделе вычислен градиент функционала (30), приводится оценка приращения решения задачи (31)-(36) и оценка остаточного члена в выражении приращения функционала (30).

Далее доказывается

Теорема 7. Пусть выполняются выше наложенные условия на данные задачи (31)-(36). Тогда для оптимальности управления

$$v^*(x, t) = (v_1^*(x, t), v_2^*(x, t)) \in U$$

в задаче (30)-(36) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\iint_Q [(\alpha v_1^*(x, t) - \psi_1(x, t))(v_1(x, t) - v_1^*(x, t)) + (\alpha v_2^*(x, t) - \psi_2(x, t)) \times \\ \times (v_2(x, t) - v_2^*(x, t))] dx dt \geq 0,$$

где $(\psi_1(x, t), \psi_2(x, t))$ является решением сопряженной задачи

$$EI \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} - \rho A e \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} = 0,$$

$$EC_\omega \frac{\partial^4 \psi_2}{\partial x^4} - GC \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \rho(I + Ae^2) \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} - \rho A e \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = 0,$$

$$\psi_1(0, t) = \psi_1(l, t) = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0,$$

$$\psi_2(0, t) = \psi_2(l, t) = 0, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0,$$

$$\psi_1(x, T) = 0, \quad \psi_2(x, T) = 0,$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} \Big|_{t=T} = - \frac{(I + Ae^2)(y_0(x) - y(x, T; v) + Ae(\theta_0(x) - \theta(x, T; v)))}{\rho I A},$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial t} \Big|_{t=T} = - \frac{(y_0(x) - y(x, T; v)e + (\theta_0(x) - \theta(x, T; v)))}{\rho I},$$

при $v^*(x, t) = (v_1^*(x, t), v_2^*(x, t))$

В разделе 3.2 выводится необходимое условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина в следующей задаче оптимального управления: рассмотрим колебания стержня, описываемые системой двух дифференциальных уравнений в области $Q = \{0 < x < l, 0 < t < T\}$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x) I(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho(x) A(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \rho(x) A(x) e(x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \\ = f_1(x, t, y, \theta, v_1, v_2), \quad (37)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x) C_\omega(x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (G(x) C(x) \theta) - \rho(x) A(x) e(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \\ + \rho(x) (I(x) + A(x) e^2(x)) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = f_2(x, t, y, \theta, v_1, v_2). \quad (38)$$

Пусть стержень свободно зашпелен. Тогда при $x = 0$ и $x = l$ имеем граничные условия

$$y|_{x=0} = y|_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \quad (39)$$

$$\theta|_{x=0} = \theta|_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0. \quad (40)$$

Зададим начальные условия

$$y|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad (41)$$

$$\theta|_{t=0} = g_0(x), \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} \Big|_{t=0} = g_1(x). \quad (42)$$

За класс допустимых управлений U берем множество вектор-функций $v(x, t) = (v_1(x, t), v_2(x, t))$ измеримых в Q и для почти всех $(x, t) \in Q$ принимающих значения из $V \subset R^2$, где V - произвольное непустое множество.

Пусть требуется минимизировать функционал

$$J(v) = \iint_Q f_0(x, t, y, \theta, v_1, v_2) dx dt \quad (43)$$

в классе U при ограничениях (37)-(42), где $(y(x, t; v), \theta(x, t; v))$ решение задачи (37)-(42), соответствующее управлению $v(x, t) = (v_1(x, t), v_2(x, t))$.

Предположим, что данные задачи удовлетворяют следующим условиям:

1. $E(x), I(x), \rho(x), A(x), e(x), C_w(x), G(x), C(x)$ измеримые, ограниченные и положительные функции на отрезке $[0, l]$.

2. $\varphi_0, \varphi_1, g_0, g_1$ - заданные функции, причем $\varphi_0 \in W_2^0(0, l)$, $g_0 \in W_2^0(0, l)$, $\varphi_1, g_1 \in L_2(0, l)$.

3. Функции $f_i(x, t, y, \theta, v_1, v_2)$, $i = 0, 1, 2$ непрерывны в $Q \times R^2 \times R^2$ и имеют непрерывные производные $\frac{\partial f_i}{\partial y}, \frac{\partial f_i}{\partial \theta}$, причем

$\frac{\partial f_i}{\partial y}, \frac{\partial f_i}{\partial \theta}, i = 1, 2$ ограничены и $\frac{\partial f_i}{\partial y}, \frac{\partial f_i}{\partial \theta}, i = 0, 1, 2$ удовлетворяют условию Липшица по (y, θ) .

В этом разделе с помощью импульсной вариации управления получается оценка приращения решения краевой задачи, выводится формула приращения функционала, приводится оценка остаточного члена в формуле приращения функционала и доказывается

Теорема 8. Пусть данные задачи (37)-(43) удовлетворяют выше наложенным условиям 1-3. Тогда для оптимальности управления $(v_1^0(x, t), v_2^0(x, t))$ в задаче (37)-(43) необходимо выполнение условия максимума

$$\begin{aligned} \max_{v=(v_1, v_2) \in V} H(x, t, y_0(x, t), \theta_0(x, t), v_1, v_2, \psi_1(x, t), \psi_2(x, t)) = \\ = H(x, t, y_0(x, t), \theta_0(x, t), v_1^0(x, t), v_2^0(x, t), \psi_1(x, t), \psi_2(x, t)), \quad (x, t) \in Q, \end{aligned}$$

где $y_0(x, t), \theta_0(x, t)$ - решение задачи (37)-(43) при $v(x, t) = v_0(x, t)$, а $\psi_1(x, t), \psi_2(x, t)$ - решение сопряженной задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x) I(x) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} \right) + \rho(x) A(x) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} - \rho(x) A(x) e(x) \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} = \\ = \frac{\partial H(x, t, y_0(x, t), \theta_0(x, t), v_1^0(x, t), v_2^0(x, t), \psi_1(x, t), \psi_2(x, t))}{\partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x) C_w(x) \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} \right) - G(x) C(x) \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} - \rho(x) A(x) e(x) \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} + \\ + \rho(x) (I(x) + A(x) e^2(x)) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = \\ = \frac{\partial H(x, t, y_0(x, t), \theta_0(x, t), v_1^0(x, t), v_2^0(x, t), \psi_1(x, t), \psi_2(x, t))}{\partial \theta} \\ \psi_1|_{x=0} = \psi_1|_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \\ \psi_2|_{x=0} = \psi_2|_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \\ \psi_1|_{t=T} = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \Big|_{t=T} = 0, \\ \psi_2|_{t=T} = 0, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \Big|_{t=T} = 0. \end{aligned}$$

В заключение выражаю глубокую благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Г.Ф.Кулиеву за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Основное содержание диссертационной работы опубликовано в следующих работах:

1. Кулиев Г.Ф., Назарова В.Б., Задача управления колебаниями упругого стержня // Научная конференция посвященная 50-летию кафедры «Вычислительной математики» Бакинского Государственного Университета, 2012, с. 67-68.

2. Кулиев Г.Ф. , Назарова В.Б., Задача управления колебаниями упругого стержня// Вестник Бакинского Университета., серия физико-математических наук, 2012, №4, с. 65-72.
3. Кулиев Г.Ф. , Назарова В.Б., Задача управления колебаниями упругого стержня//Тələbə, magistrant və gənc tədqiqatçıların «Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri» adlı respublika elmi konfransının materialları , 2012, s. 109-111.
4. Guliyev H.F., Nazarova V.B. A problem an elastic bar vibrations control // National Academy Of Azerbaijan Proceedings Of Institute Of Mathematics And Mechanics, 2012, vol. XXXVII(XLV), p.p. 121-128.
5. Nazarova V.B. Control problem of elastic rod oscillations // IV international conference «Problems of cybernetics and informatics», vol. IV,2012, p. 124.
6. Кулиев Г.Ф. , Назарова В.Б., Применение метода проблемы моментов к решению задачи оптимального управления для уравнения колебаний стержня // Вестник Бакинского Университета., серия физико-математических наук, 2013, №1, с. 11-17.
7. Guliyev H.F., Nazarova V.B. An optimal speed problem for a bar oscillation equation with distributed control // Transactions of NAS of Azerbaijan., series of Mathematical science, 2013, XXXIII, № 4, p.p. 147-152.
8. Назарова В.Б., Задача оптимального управления для слабо нелинейных уравнений связанными изгибно-крутильными колебаниями стержня// Вестник Бакинского Университета., серия физико-математических наук, 2014, №2, с. 76-91.
9. Guliyev H.F., Nazarova V.B. An optimal control problem for a system of linear hyperbolic differential equations with constant coefficients // Georgian Mathematical Journal, 2015, 22(2), DOI 10.1515/gmj-2015-0012., p.p. 235-241.
10. Ramazanova A.T., Nazarova V.B., An optimal control problem for the equations of flexural-torsional oscillations of a bar // Transactions of NAS of Azerbaijan., series of Mathematical science, 2015, XXXV, № 1, p.p. 142-156.

NAZAROVA VERA BORISOVNA

DÖRD TƏRTİBLİ XÜSUSİ TÖRƏMƏLİ SİSTEMLƏRDƏ OPTİMAL İDARƏETMƏNİN BƏZİ MƏSƏLƏLƏRİN TƏDQIQI

XÜLASƏ

Dissertasiya işi dörd tərtibli xüsusi törəməli sistemlərdə optimal idarəetmənin bəzi məsələlərin tədqiqinə həsr olunub.

Dissertasiya işində aşağıdakı elmi yeniliklər alınmışdır:

- sərhəd idarəedicisi halında çubuğun eninə rəqsləri tənliyi üçün idarə olunma məsələsinin həlli sıra şəklində qurulmuşdur;
- istənilən uzunluqlu intervalda sərhəd idarəedicilərinin köməyi ilə idarə olunma məsələsinin həlli sıra şəklində qurulmuşdur;
- paylanmış idarəedicili çubuğun eninə rəqsləri tənliyi üçün optimal ən tez təsir məsələsi həll edilmiş və onun həlli sıra şəklində tapılmışdır;
- çubuğun əyilmə-burulma rəqsləri ilə bağlı olan zəif qeyri-xətti tənliklər üçün sərhəd məsələsinin həll olunması tədqiq edilmişdir;
- çubuğun eninə rəqsləri tənliyi üçün optimal idarəetmə məsələsinin həlli moment probleminin köməyi ilə tapılmışdır;
- çubuğun əyilmə-burulma rəqsləri ilə bağlı olan zəif qeyri-xətti tənliklər üçün optimal idarəedicinin varlığı isbat edilmişdir;
- xətti tənliklər halında çubuğun əyilmə-burulma rəqsləri ilə bağlı olan optimal idarəetmə məsələsində optimallıq üçün zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır;
- çubuğun əyilmə-burulma rəqslərinin zəif qeyri-xətti tənliyi üçün optimal idarəetmə məsələsində optimallıq üçün Potryaqinin maksimum prinsipi şəklində zəruri şərt tapılmışdır.

NAZAROVA VERA BORISOVNA

**INVESTIGATION OF SOME OPTIMAL CONTROL
PROBLEMS IN THE SYSTEMS DESCRIBED BY THE FOURTH
ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS**

SUMMARY

The thesis is devoted to the investigation of some optimal control problems in the systems described by the fourth order partial differential equations.

The following main results have been obtained in the thesis.

- the solution of the control problem for the equation of the cross vibrations of the bar in the form of series is constructed in the case of boundary control;
- the solution of the control problem is constructed in the form of the series for the bar with arbitrary length;
- minimal time problem is solved and its solution is formed in the form of series for the cross vibrations of the bar with distributed controls;
- solvability of the boundary problem is investigated for the weak non linear equations associated with the bending-torsional vibrations of the bar;
- solution of the optimal control problem is found for the equations of cross vibrations of the bar by the help of moment problems;
- existence of the optimal control is proved for the weak non linear equations associated with the bending-torsional vibrations of the bar;
- necessary and sufficient conditions are found for the optimal control problem associated with the bending-torsional vibrations of the bar;
- necessary condition is derived in the form of Pontryagin's maximum principle for the weak non linear equation of the bending-torsional vibration of the bar.

**AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ
BAKİ DÖVLƏT UNIVERSİTETİ**

Əlyazması hüququnda

NAZAROVA VERA BORISOVNA

**DÖRD TƏRTİBLİ XÜSUSİ TÖRƏMƏLİ SİSTEMLƏRDƏ
OPTİMAL İDARƏETMƏNİN BƏZİ MƏSƏLƏLƏRİNİN
TƏDQİQİ**

1211.01 – Diferensial tənliklər

**Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın**

A V T O R E F A R A T I

BAKİ-2016