

**НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

На правах рукописи

АИДА АГАЙСА кызы ДУНЬЯМАЛИЕВА

**СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА ШТУРМА-
ЛИУВИЛЛЯ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В
ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ**

1202.01 – Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

Баку – 2016

Работа выполнена в отделе «Функциональный анализ»
Института Математики и Механики НАН Азербайджана.

Научный руководитель:

доктор наук по математике

Зиятхан С. Алиев

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, проф. **Назим Б. Керимов**
(Университет Хазар)

доктор физико-математических наук, проф. **Вали М. Курбанов**
(Азербайджанский Государственный Педагогический Университет)

Ведущая организация:

Азербайджанский университет архитектуры и строительства
кафедра «Высшая математика».

Защита состоится 25 ноября 2016 г. в 14⁰⁰ часов на заседании
Диссертационного Совета Д 01.111 по присуждению ученой степени
доктора наук и доктора философии при Институте Математики и
Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, Баку, ул. Б. Вагабзаде, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института
Математики и Механики Национальной Академии Наук
Азербайджана.

Автореферат разослан 19 октября 2016 г.

Ученый секретарь

Диссертационного Совета
Д 01.111 ИММ НАНА

д.н.м., доц. Р. А. Бандалиев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию спектральных свойств задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях. Задачам подобного типа приводятся многие конкретные задачи механики и математической физики. Еще М. Пуассон в своем мемуаре решал задачу о продольном движении груза, подвешенного к концу упругой нити. А.Н. Крылов и С.П. Тимошенко указывали на актуальность задачи о продольных колебаниях стержня в связи с теорией индикатора паровой машины и прочих измерительных приборов. Задача подобного плана приобрела особую актуальность еще и в связи с изучением устойчивости вибраций крыльев самолета. Недавно интерес к задачам Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях возник в связи с теорией осреднения.

Исследование краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений со спектральным параметром в граничных условиях в общем случае ведет начало от работ Дж. Биркгофа и Я.Д. Тамаркина. В этих работах изучались вопросы асимптотики собственных значений и спектральных разложений для различных классов краевых задач.

Краевые задачи для оператора Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях изучались в работах Ж. Уолтера, Ч.Т. Фултона, А. Шнайдера, Д.Б. Хинтона, Е.М. Руссаковского, П.А. Байдинга, П.Дж. Брауна и Б.А. Ватсона. В работах Дж. Уолтера, Ч.Т. Фултона, А. Шнайдера, Д.Б. Хинтона рассматриваемые задачи реализуются как задачи на собственные значения для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве $L_2 \oplus \mathbb{C}$, а в работах Е.М. Руссаковского, П.А. Байдинга, П.Дж. Брауна и Б.А. Ватсона допускался случай полиномиального вхождения спектрального параметра λ в краевые условия и соответствующие задачи реализовались как спектральные задачи для самосопряженных операторов в пространстве $L_2 \oplus \mathbb{C}^N$. В этих работах установлена также базисность Рисса системы собственных векторов соответствующих операторов в $L_2 \oplus \mathbb{C}$ и в $L_2 \oplus \mathbb{C}^N$.

А.А. Шкаликовым построена общая теория спектральных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях. Им доказаны теоремы кратной базисности,

разложения и полноты корневых векторов для различных классов краевых задач: регулярных, почти регулярных и нормальных.

В работах Е.И. Моисеева и Н.Ю. Капустина впервые изучены вопросы полноты, минимальности и базисности в пространстве L_p , $1 < p < \infty$, систем корневых функций оператора Штурма-Лиувилля (без потенциала) со спектральным параметром в граничном условии. Ими найдены необходимые и достаточные условия базисности в L_p , $1 < p < \infty$, систем корневых функций, с одной удаленной функцией.

Вопросы полноты, минимальности и базисности в случае наличие потенциала исследованы Н.Ю. Капустиным, Н.Б. Керимовым и В.С. Мирзоевым, В.М. Курбановым, З.С. Алиевым и Э.А. Агаевым.

Базисные свойства задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в обоих граничных условиях в случае, когда задача сводится к задаче на собственные значения для самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве $H = L_2 \oplus \mathbb{C}^2$, исследована в работах Н.Ю. Капустина (в частном случае), Н.Б. Керимова и Р.Г. Поладова, З.С. Алиева и Р.Г. Поладова, Р.Г. Поладова (в общем случае). В этих работах найдены условия при которых система собственных функций после удаления двух функций образует базис в пространстве L_p , $1 < p < \infty$. Кроме того, в работе Н.Б. Керимова и Р.Г. Поладова изучены также осцилляционные свойства собственных функций. В случае, когда задача интерпретируется как спектральная задача для J – самосопряженного оператора в пространствах Понтрягина Π_1 и Π_2 базисные свойства корневых функций изучены З.С. Алиевым (в частном случае). Им установлены условия при которых система корневых функций задачи, после удаления двух функций, образует базис в пространстве L_p , $1 < p < \infty$.

Н.Б. Керимовым и З.С. Алиевым, З.С. Алиевым рассмотрены вопросы базисности в пространстве L_p , $1 < p < \infty$, систем корневых функций задачи Штурма-Лиувилля четвертого порядка со спектральным параметром в граничном условии. В этих работах изучены осцилляционные свойства собственных функций, получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций, установлены необходимые и достаточные условия для базисности систем корневых функций с одной удаленной функцией.

Вопрос о базисности для систем корневых функций первоначальных задач, в более общей формулировке, исследован в работах Б.Т. Билалова и Т.Р. Мурадова, Т.Б. Гасимова, З.С. Алиева.

Таким образом, актуальным вопросом является исследование спектральных свойств задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях в случае, когда задача реализуется как спектральная задача для J – самосопряженного оператора в пространствах Понтрягина Π_1 и Π_2 .

Цель работы. Изучение общей характеристики расположения собственных значений на вещественной оси (комплексной плоскости), структуры корневых подпространств и осцилляционных свойств собственных функций, исследование базисных свойств в пространствах L_p , $1 < p < \infty$, систем корневых функций задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях, в случаях когда эта задача реализуется как спектральная задача для J – самосопряженного оператора в пространствах Понтрягина Π_1 и Π_2 .

Методы исследования. В работе использованы методы теории функции действительного переменного, методы комплексного анализа, методы спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов, методы спектральной теории линейных операторов, методы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой.

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные результаты для задач Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях, сводящихся к спектральным задачам для J – самосопряженных операторов в пространствах Понтрягина Π_1 и Π_2 :

- найдена общая характеристика расположения собственных значений на вещественной оси;
- изучены осцилляционные свойства собственных функций;
- найдено необходимое и достаточное условие дефектной базисности (с дефектным числом 2) в пространстве $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, системы корневых функций;
- установлены достаточные условия дефектной базисности (с дефектным числом 2) в пространстве $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, системы корневых функций.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут быть использованы в различных вопросах спектральной теории дифференциальных операторов, при изучении различных задач математической физики, в теории колебаний, в теории тепловой конвекции.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на семинаре отделов «Функциональный анализ» (рук.–проф. Г.И. Асланов), "Дифференциальные уравнения" (рук. - проф. А.Б. Алиев) и «Негармонический анализ» (рук.– проф. Б.Т. Билалов) ИММ НАН Азербайджана, на научной конференции посвященной 50- летию кафедры "Вычислительной математики" БГУ (Баку, 2012), на международной конференции посвященной 55-летию Института Математики и Механики НАН Азербайджана (Баку, 2014), на 7-ой международной конференции «Математический анализ, дифференциальные уравнения и их приложения" (Madea-7) (Баку, 2015).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 работ, список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертационная работа изложена на 113 страницах, состоит из введения, двух глав и списка литературы, содержащий 73 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы, приводится краткий исторический обзор результатов, связанных с темой диссертации и излагаются основные результаты диссертации.

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$\ell(y)(x) \equiv -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0,1), \quad (1)$$

$$(a_0\lambda + b_0)y(0) = (c_0\lambda + d_0)y'(0), \quad (2)$$

$$(a_1\lambda + b_1)y(1) = (c_1\lambda + d_1)y'(1), \quad (3)$$

где λ – спектральный параметр, $q(x)$ – действительная непрерывная функция на отрезке $[0,1]$, $a_i, b_i, i = 0,1$ – действительные постоянные, причем

$$\sigma_0 = a_0d_0 - b_0c_0 < 0, \quad \sigma_1 = a_1d_1 - b_1c_1 < 0.$$

Отметим, что знаки параметров σ_0 и σ_1 играют существенную роль. В случае $\sigma_0 < 0$ и $\sigma_1 > 0$ задачу (1)-(3) можно интерпретировать как спектральную задачу для самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве $H = L_2(0,1) \oplus \mathbb{C}^2$. В случае $\sigma_0 < 0$ и $\sigma_1 < 0$ эта задача реализуется как спектральная задача для J -самосопряженного оператора в пространстве Понтрягина $\Pi_1 = L_2(0,1) \oplus \mathbb{C}^2$, а в случае $\sigma_0 > 0$ и $\sigma_1 < 0$ – в $\Pi_2 = L_2(0,1) \oplus \mathbb{C}^2$ (с соответствующими внутренними произведениями); при этом задача (1)-(3) может иметь вещественное кратное, либо невещественные собственные значения.

Для изучения базисных свойств в пространстве $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, систем корневых функций спектральной задачи (1)-(3) необходимы: общая характеристика расположения собственных значений на вещественной оси (комплексной плоскости), структура корневых подпространств и осцилляционные свойства собственных функций этой задачи. В случае $\sigma_0 < 0$, $\sigma_1 > 0$ эти вопросы исследованы в работах П.А. Байдинга, П.Дж. Брауна и Дж. Седдиги, Н.Б. Керимова и Т.И. Аллахвердиева в которых, в частности доказано, что эта задача имеет дискретный спектр, причем все собственные значения задачи (1)-(3) являются вещественными, простыми и образуют неограниченно возрастающую последовательность. В работе Н.Б. Керимова и Р.Г. Поладова полностью изучены осцилляционные свойства собственных функций.

Подходы, использованные в вышеприведенных работах, не дают полного ответа на указанные выше вопросы в случае $\sigma_0 < 0$ и $\sigma_1 < 0$. Исследованию этих вопросов посвящены первые два параграфа настоящей главы. В 1.3 дается операторная интерпретация задачи (1)-(3) и построение системы сопряженной к системе корневых векторов соответствующего оператора-линеаризатора. В параграфе 1.4 устанавливаются как необходимое и достаточное условие, так и достаточные условия базисности в пространстве $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, систем корневых функций задачи (1)-(3) при $\sigma_0 < 0$ и $\sigma_1 < 0$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $c_0 \neq 0$ и $c_1 = 0$.

В 1.1 изучается структура корневых подпространств задачи (1)-(3). Пусть μ'_k , $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ($\mu'_0 < \mu'_1 < \dots < \mu'_k < \dots$), есть k -е собственное

значение задачи Штурма-Лиувилля

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0, 1), \quad y(0) = y(1) = 0.$$

В случае $c_0 \neq 0$ целое неотрицательное число N_0 определим из неравенства $\mu'_{N_0-1} < -d_0/c_0 \leq \mu'_{N_0}$.

Наряду задач (1)-(3) рассмотрим следующую спектральную задачу

$$\left. \begin{aligned} &-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0, 1), \\ &(a_0\lambda + b_0)y(0) = (c_0\lambda + d_0)y'(0), \quad y(1) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Отметим, что собственные значения краевой задачи (4) являются вещественными, простыми и образуют неограниченно возрастающую последовательность $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty} : \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_k < \dots$.

Пусть $y(x, \lambda)$ есть решение уравнения (1) удовлетворяющее начальным условиям $y(0, \lambda) = c_0\lambda + d_0$, $y'(0, \lambda) = a_0\lambda + b_0$. Для каждого фиксированного $x \in [0, 1]$ функция $y(x, \lambda)$ является целой функцией параметра λ .

Заметим, что функция $F(\lambda) = y'(1, \lambda)/y(1, \lambda)$ определена для значений $\lambda \in K \equiv (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (\mu_{k-1}, \mu_k) \right)$ и является мероморфной функцией конечного порядка, ν_k и μ_k , $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ – нули и полюсы этой функции соответственно, где $\nu_k - k$ -е собственное значение спектральной задачи (1), (2) и $y'(1) = 0$, которое также является простым $(\nu_0 < \nu_1 < \dots < \nu_k < \dots)$.

Лемма 1. *Имеет место представление*

$$F(\lambda) = F(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda c_k}{\mu_k(\lambda - \mu_k)},$$

где $c_k = \operatorname{res}_{\lambda=\mu_k} F(\lambda) > 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Обозначим: $m(\lambda) = a_0 y(0, \lambda) - c_0 y'(0, \lambda)$, $n(\lambda) = a_1 y(1, \lambda)$.

Замечание 1. Для любого $\lambda \in C$ имеем $m(\lambda) = \sigma_0$. Кроме того, если λ^* – собственное значение задачи (1)-(3), то $n(\lambda^*) \neq 0$.

Отметим, что собственными значениями (с учетом кратности) задачи (1)-(3) являются корни уравнения

$$(a_1\lambda + b_1)y(1, \lambda) - d_1 y'(1, \lambda) = 0. \quad (5)$$

В свою очередь, в силу замечания 1, каждый корень (с учетом кратности) уравнения (5) является и корнем уравнения

$$F(\lambda) = (a_1/d_1)\lambda + (b_1/d_1). \quad (6)$$

Обозначим: $A_k = (\mu_{k-1}, \mu_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, где $\mu_{-1} = -\infty$.

Теорема 1. *Имеет место одно из следующих утверждений:*

(i) *все собственные значения задачи (1)-(3) вещественны, при этом A_0 содержит алгебраически два (либо два простых, либо одно двукратное) собственных значения, а $A_k, k = 1, 2, \dots$, – одно простое собственное значение;* (ii) *все собственные значения задачи (1)-(3) вещественны, при этом A_0 не содержит собственных значений, в то же время существует натуральное число M такое, что A_M содержит алгебраически три (либо три простых, либо одно двукратное и одно простое, либо одно трехкратное) собственных значения, а $A_k, k = 1, 2, \dots, k \neq M$ – одно простое собственное значение;* (iii) *задача (1)-(3) имеет одну пару невещественных сопряженных друг к другу собственных значений, при этом A_0 не содержит собственных значений, а $A_k, k = 1, 2, \dots$, содержит одно простое собственное значение.*

Пусть $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ – система собственных значений задачи (1)-(3), а $\{y_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ – соответствующая система корневых функций: $y_k(x) = y(x, \lambda_k)$, если $\wp(\lambda_k) = 1$; $y_k(x) = y(x, \lambda_k)$, $y_{k+1}(x) = y_{k+1}^*(x) + p_k y_k(x)$, если $\wp(\lambda_k) = 2$; $y_k(x) = y(x, \lambda_k)$, $y_{k+1}(x) = y_{k+1}^*(x) + d_k y_k(x)$, $y_{k+2}(x) = y_{k+2}^*(x) + d_k y_{k+1}^*(x) + h_k y_k$, если $\wp(\lambda_k) = 3$; где $\wp(\lambda_k)$ – кратность собственного значения λ_k , $y_{k+1}^*(x) = \partial y(x, \lambda_k) / \partial \lambda$, $y_{k+2}^*(x) = \partial^2 y(x, \lambda_k) / 2 \partial \lambda^2$, а p_k, d_k, h_k – произвольные постоянные; функций $y_k(x)$, $y_{k+1}(x)$ в случае $\wp(\lambda_k) = 2$, $y_k(x)$, $y_{k+1}(x)$, $y_{k+2}(x)$ в случае $\wp(\lambda_k) = 3$, образуют цепочку собственной и присоединенных функций.

В параграфе 1.2. изучены осцилляционные свойства собственных функций задачи (1)-(3).

Теорема 2. *Пусть $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ – последовательность собственных значений задачи (1)-(3): $\lambda_0 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_{M-1} \leq \lambda_M \leq \lambda_{M+1} < \dots$, если имеет*

имеет место утверждение (i) либо (ii) теоремы 1; $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$, $\lambda_1 = \overline{\lambda_0}$, $\lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_k < \dots$, если имеет место утверждение (iii) теоремы 1. Тогда, собственная функция $y_k(x)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, соответствующая собственному значению λ_k , обладает следующими осцилляционными свойствами:

а) если имеет место утверждения (i) и (iii) теоремы 1, то собственная функция $y_k(x)$ при $2 \leq k \leq N_0 + 1$ имеет в точности $k - 1$, при $k \geq N_0 + 3$ в точности $k - 2$ простых нулей в интервале $(0, 1)$; собственная функция $y_{N_0+2}(x)$ имеет либо $N_0 + 1$ (в случае $\lambda_{N_0+2} \in (\mu_{N_0}, -d_0/c_0)$), либо N_0 (в случае $\lambda_{N_0+2} \in (-d_0/c_0, \mu_{N_0+1})$) простых нулей в интервале $(0, 1)$; в случае $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$, функция $y_0(x)$ не имеет нулей в интервале $(0, 1)$, причем $y_1(x)$ также не имеет нулей в интервале $(0, 1)$ при $\lambda_0 \neq \lambda_1$;

б) если имеет место утверждения (ii) теоремы 1, то

б₁) в случае $M < N_0 + 1$ функция $y_k(x)$ при $k \leq M - 1$ имеет в точности $k + 1$, при $M + 2 \leq k \leq N_0 + 1$ в точности $k - 1$, а при $k \geq N_0 + 3$ в точности $k - 2$ простых нулей в интервале $(0, 1)$, в случае когда $y_k(x)$, $k = M - 1, M, M + 1$ – собственная функция, то она имеет ровно M простых нулей в интервале $(0, 1)$, собственная функция $y_{N_0+2}(x)$ имеет либо $N_0 + 1$ (при $\lambda_{N_0+2} \in (\mu_{N_0}, -d_0/c_0)$), либо N_0 (при $\lambda_{N_0+2} \in (-d_0/c_0, \mu_{N_0+1})$) простых нулей в интервале $(0, 1)$;

б₂) в случае $M > N_0 + 1$ функция $y_k(x)$ при $k < N_0$ имеет в точности $k + 1$, при $N_0 + 1 \leq k \leq M - 1$ в точности k , а при $k \geq M + 2$ в точности $k - 2$ простых нулей в интервале $(0, 1)$, в случае когда $y_k(x)$, $k = M - 1, M, M + 1$ – собственная функция, то она имеет в точности $M - 1$ простых нулей в интервале $(0, 1)$, собственная функция $y_{N_0}(x)$ имеет либо $N_0 + 1$ (при $\lambda_{N_0} \in (\mu_{N_0}, -d_0/c_0)$), либо N_0 (при $\lambda_{N_0} \in (-d_0/c_0, \mu_{N_0+1})$) простых нулей в интервале $(0, 1)$;

б₃) в случае $M = N_0 + 1$ функция $y_k(x)$ при $k < M - 1$ имеет в

точности $k + 1$, при $k \geq M + 2$ в точности $k - 2$ простых нулей в интервале $(0, 1)$, в случае когда $y_k(x)$, $k = M - 1, M, M + 1$ – собственная функция, то она имеет либо $N_0 + 1$ (при $\lambda_k \in (\mu_{N_0}, -d_0/c_0)$), либо N_0 (при $\lambda_k \in (-d_0/c_0, \mu_{N_0+1})$) простых нулей в интервале $(0, 1)$.

В 1.3 дается операторная трактовка задачи (1)-(3) и построение системы сопряженной к системе корневых векторов соответствующего оператора.

Задача (1)-(3) сводится к задаче на собственные значения для оператора L в гильбертовом пространстве $H = L_2(0,1) \oplus \mathbb{C}^2$ со скалярным произведением

$$(\hat{y}, \hat{u}) = (\{y(x), m, n\}, \{u(x), s, t\}) = (y, u)_{L_2} + |\sigma_0|^{-1} m \bar{s} + |\sigma_1|^{-1} n \bar{t}.$$

где $(\cdot, \cdot)_{L_2}$ – скалярное произведение в $L_2(0,1)$, оператор

$L\hat{y} = L\{y, m, n\} = \{-y''(x) + q(x)y(x), d_0 y'(0) - b_0 y(0), d_1 y'(1) - b_1 y(1)\}$, с областью определения

$$D(L) = \{\{y, m, n\} \in H : y, y' \in AC(0,1), -y'' + q(x)y(x) \in L_2(0,1), \\ m = a_0 y(0) - c_0 y'(0), n = a_1 y(1)\}$$

всюду плотной в H , где $AC(0,1)$ – класс абсолютно непрерывных на $(0,1)$ функции. Очевидно, что оператор L определен в H корректно. Задача (1)-(3) принимает вид

$$L\hat{y} = \lambda \hat{y}, \quad \hat{y} \in D(L),$$

т.е. собственные значения λ_k задачи (1)-(3) и оператора L совпадают вместе с их кратностями, а между собственными и присоединенными функциями имеется взаимно однозначное соответствие

$$y_k(x) \leftrightarrow \{y_k(x), m_k, n_k\}, \quad m_k = a_0 y_k(0) - c_0 y'_k(0), \quad n_k = a_1 y_k(1).$$

Оператор L являются замкнутым (несамосопряженным) оператором в H с компактной резольventой.

Определим оператор $J : H \rightarrow H$ следующим образом: $J\{y, m, n\} = \{y, m, -n\}$. Этот оператор порождает пространство Понтрягина $\Pi_1 = L_2(0,1) \oplus \mathbb{C}^2$ с внутренним произведением

$$[\hat{y}, \hat{u}] = (\hat{y}, \hat{u})_{\Pi_1} = (\{y, m, n\}, \{u, s, t\})_{\Pi_1} = (y, u)_{L_2} - \sigma_0^{-1} m \bar{s} + \sigma_1^{-1} n \bar{t}.$$

Лемма 2. Оператор L является J – самосопряженным в Π_1 ; если L^* – оператор сопряженный к оператору L в H , то $L^* = J L J$.

Система корневых векторов $\{y_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, $\hat{y}_k = \{y_k(x), m_k, n_k\}$, оператора L образует базис Рисса в H .

Каждый элемент $\hat{y}_k = \{y_k(x), m_k, n_k\}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, где $m_k = \sigma_0$, $n_k = a_1 y_k(1)$, системы корневых векторов $\{\hat{y}_k\}_{k=0}^{\infty}$ оператора L удовлетворяет соотношению

$$L\hat{y}_k = \lambda_k \hat{y}_k + \theta_k \hat{y}_{k-1},$$

где θ_k равно либо нулю (при этом $\hat{y}_k$ – собственный вектор), либо единице (при этом $\lambda_k = \lambda_{k-1}$, $\hat{y}_k$ – присоединенный вектор).

Элемент $\hat{\mathcal{G}}_k^* = \{\mathcal{G}_k^*(x), s_k^*, t_k^*\}$, системы собственных векторов $\{\mathcal{G}_k^*\}_{k=0}^{\infty}$ оператора L^* , удовлетворяет равенству

$$L^* \hat{\mathcal{G}}_k^* = \bar{\lambda}_k \hat{\mathcal{G}}_k^* + \theta_{k+1} \hat{\mathcal{G}}_{k+1}^*.$$

Лемма 3. *Справедливы следующие утверждения:*

$\hat{\mathcal{G}}_k^* = J \hat{y}_k$, если $\wp(\lambda_k) = 1$; $\hat{\mathcal{G}}_k^* = J\hat{y}_{k+1}^* + \tilde{p}_k J\hat{y}_k$, $\hat{\mathcal{G}}_{k+1}^* = J\hat{y}_k$, если $\wp(\lambda_k) = 2$, $\hat{\mathcal{G}}_k^* = J\hat{y}_{k+2}^* + \tilde{d}_k J\hat{y}_{k+1}^* + \tilde{h}_k J\hat{y}_k$, $\hat{\mathcal{G}}_{k+1}^* = J\hat{y}_{k+1}^* + \tilde{d}_k J\hat{y}_k$, $\hat{\mathcal{G}}_{k+2}^* = J\hat{y}_k$, если $\wp(\lambda_k) = 3$, где $\bar{y}_k = \{\bar{y}_k(x), \bar{m}_k, \bar{n}_k\}$, $\hat{y}_{k+1}^* = \{y_{k+1}^*(x), m_{k+1}^*, n_{k+1}^*\}$, $m_{k+1}^* = m'(\lambda_k) = 0$, $n_{k+1}^* = n'(\lambda_k)$, $\hat{y}_{k+2}^* = \{y_{k+2}^*(x), m_{k+2}^*, n_{k+2}^*\}$, $m_{k+2}^* = (1/2)m''(\lambda_k) = 0$, $m_{k+2}^* = (1/2)m''(\lambda_k) = 0$, $n_{k+2}^* = (1/2)n''(\lambda_k)$, $\tilde{p}_k, \tilde{d}_k, \tilde{h}_k$ – произвольные постоянные.

Для построения системы $\{\hat{\mathcal{G}}_k^*\}_{k=0}^{\infty}$, сопряженной к системе $\{\hat{y}_k\}_{k=0}^{\infty}$, введем числа δ_k , $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, следующим образом:

$$\delta_k = \begin{cases} [\hat{y}_k, \bar{y}_k], & \text{если } \wp(\lambda_k) = 1, \\ [\hat{y}_k, \hat{y}_{k+1}^*], & \text{если } \wp(\lambda_k) = 2, \\ \|\hat{y}_{k+1}^*\|_{\Pi_1}^2, & \text{если } \wp(\lambda_k) = 3. \end{cases} \quad (7)$$

где $\|\cdot\|_{\Pi_1}$ – норма в пространстве Π_1 .

Лемма 4. $\delta_k \neq 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Теорема 3. Элемент $\hat{\mathcal{G}}_k = \{\mathcal{G}_k(x), s_k, t_k\}$ системы $\{\hat{\mathcal{G}}_k^*\}_{k=0}^{\infty}$ сопряженной к системе $\{\hat{y}_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\hat{y}_k = \{y_k(x), m_k, n_k\}$, определяется равенством $\hat{\mathcal{G}}_k = \bar{\delta}_k^{-1} \hat{\mathcal{G}}_k^*$, где $\hat{\mathcal{G}}_k^*$, $k = 0, 1, \dots$, определяются леммой 3, а δ_k , $k = 0, 1, \dots$, – формулой (7), при этом $\tilde{p}_k = -p_k - \delta_k^{-1} \|\hat{y}_{k+1}^*\|_{\Pi_1}^2$,

если $\wp(\lambda_k) = 2$, $\tilde{d}_k = -d_k - \delta_k^{-1} [\hat{y}_{k+1}^*, \hat{y}_{k+2}^*]$, $\tilde{h}_k = -h_k - \delta_k^{-1} \|\hat{y}_{k+2}^*\|_{\Pi_1}^2 + \delta_k^{-2} [\hat{y}_{k+1}^*, \hat{y}_{k+2}^*]^2 + d_k (d_k + \delta_k^{-1} [y_{k+1}^*, \hat{y}_{k+2}^*])$, если $\wp(\lambda_k) = 3$.

В 1.5. исследуются базисные свойства в пространстве $L_p(0, 1)$, $1 < p < \infty$, подсистем корневых функций задачи (1)-(3). Пусть $r, l, r \neq l$, – произвольные фиксированные неотрицательные целые числа и

$$\Delta_{r,l} = \begin{vmatrix} s_r & s_l \\ t_r & t_l \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Теорема 4. Если $\Delta_{r,l} \neq 0$, то система корневых функций $\{y_k(x)\}_{k=0, k \neq r,l}^\infty$ задачи (1)-(3) образует базис в пространстве $L_p(0, 1)$, $1 < p < \infty$, при $p = 2$ – даже базис Рисса, если $\Delta_{r,l} = 0$, то эта система является неполной и неминимальной в пространстве $L_p(0, 1)$, $1 < p < \infty$.

Основным результатом данной главы является следующая

Теорема 5. Пусть $r, l, r \neq l$ – произвольные фиксированные целые неотрицательные числа. Тогда система собственных функций $\{y_k(x)\}_{k=1, k \neq r,l}^\infty$ задачи (1)-(3) образует базис в пространстве $L_p(0, 1)$, $1 < p < \infty$, при $p = 2$ – даже базис Рисса, в следующих случаях:

а) имеет место либо утверждение (i) теоремы 1, либо утверждение (iii), $r, l \geq 2$ и имеют разные четности;

б) имеет место утверждения (ii) теоремы 1 (причем в случае, когда либо $\wp(\lambda_{M-1}) > 1$, либо $\wp(\lambda_M) > 1$ полагаем $r, l \neq M-1, M, M+1$) и либо $r, l \neq M$ и имеют разные четности, либо $r = M$ и l имеют одинаковые четности;

в) имеет место утверждения (iii) теоремы 1 и либо $r = 0, l \in \mathbb{N}$, либо $r = 1, l \in \mathbb{N}$;

г) имеет место утверждение (i) теоремы 1 и

г₁) $\wp(\lambda_0) = 2$: $r = 0, l = 1$ и $n_1^* \neq 0$; $r = 0, l \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и либо

$$p_0 = -\delta_0^{-1} \|\hat{y}_1^*\|_{\Pi_1}^2 \text{ и } n_1^* \neq 0, \text{ либо } p_0 \neq -\frac{n_1^* \operatorname{sgn} c_0}{2a_1(|y_0(1)| + |y_1(1)|)} - \delta_0^{-1} \|\hat{y}_1^*\|_{\Pi_1}^2$$

и l является четным; $r = 1, l \in \mathbb{N}$ и l является нечетным;

$z_2) \wp(\lambda_0)=1: r=0, l \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и имеют одинаковые четности;
 $r=1, l \in \mathbb{N}$ и имеют разные четности;

д) имеет место утверждение (ii) теоремы 1 и

$\partial_1) \wp(\lambda_{M-1})=2: r=M-1, l=M$ и $n_M^* \neq 0$; $r=M-1, l \neq M$ и
либо $p_{M-1} = -\delta_{M-1}^{-1} \|\hat{y}_M^*\|_{\Pi_1}^2$, $n_M^* \neq 0$, либо l и M имеют одинаковые
четности $p_{M-1} \neq \frac{(-1)^{M-1} n_M^* \operatorname{sgn} c_0}{a_1(|y_{M-1}(1)| + |y_l(1)|)} - \delta_{M-1}^{-1} \|\hat{y}_M^*\|_{\Pi_1}^2$; $r=M, l \neq M-1$
и имеют одинаковые четности; $r=M+1, l \neq M, M-1$ и имеют
одинаковые четности;

$\partial_2) \wp(\lambda_M)=2: r=M, l=M+1$ и $n_{M+1}^* \neq 0$; $r=M, l \neq M+1$ и
либо $p_M = -\delta_M^{-1} \|\hat{y}_{M+1}^*\|_{\Pi_1}^2$, $n_{M+1}^* \neq 0$, либо l и M имеют разные четности и
 $p_M \neq \frac{(-1)^M n_{M+1}^* \operatorname{sgn} c_0}{a_1(|y_M(1)| + |y_l(1)|)} - \delta_M^{-1} \|\hat{y}_{M+1}^*\|_{\Pi_1}^2$; $r=M+1, l \neq M$ и имеют
одинаковые четности; $r=M-1, l \neq M, M+1$ и имеют одинаковые
четности;

$\partial_3) \wp(\lambda_{M-1})=3: r=M-1, l=M$ и
либо $(d_{M-1}[\hat{y}_M^*, \hat{y}_{M+1}^*] + \|\hat{y}_{M+1}^*\|_{\Pi_1}^2) n_M^* = 0, (d_{M-1} + \delta_{M-1}^{-1} [\hat{y}_M^*, \hat{y}_{M+1}^*]) n_{M+1}^* \neq 0$,
либо $n_M^* \neq 0, h_{M-1} \neq (d_{M-1} + \delta_{M-1}^{-1} [\hat{y}_M^*, \hat{y}_{M+1}^*]) (n_{M+1}^*/n_M^*) - \delta_{M-1}^{-1} \times$
 $(d_{M-1}[\hat{y}_M^*, \hat{y}_{M+1}^*] + \|\hat{y}_{M+1}^*\|_{\Pi_1}^2)$; $r=M-1, l=M+1$ и либо $n_M^* = 0, n_{M+1}^* \neq 0$,
либо $n_M^* \neq 0, d_{M-1} \neq (n_{M+1}^*/n_M^*) - \delta_{M-1}^{-1} [\hat{y}_M^*, \hat{y}_{M+1}^*]$; $r=M, l=M+1$ и
 $n_M^* \neq 0$; $r=M-1, l \neq M, M+1$ и

$n_{M+1}^* - (d_{M-1} + \delta_{M-1}^{-1} [\hat{y}_M^*, \hat{y}_{M+1}^*]) n_M^* - (h_{M-1} + \delta_{M-1}^{-1} \|\hat{y}_{M+1}^*\|_{\Pi_1}^2 -$
 $- d_{M-1} (d_{M-1} + \delta_{M-1}^{-1} [\hat{y}_M^*, \hat{y}_{M+1}^*]) (-1)^l a_1 \operatorname{sgn} c_0 ((-1)^{M+l-1} |y_{M-1}(1)| - |y_l(1)|) \neq 0$;
 $r=M, l \neq M-1, M+1$ и

$n_M^* - (d_{M-1} + [\hat{y}_M^*, \hat{y}_{M+1}^*]) (-1)^l a_1 \operatorname{sgn} c_0 ((-1)^{M+l-1} |y_{M-1}(1)| - |y_l(1)|) \neq 0$;
 $r=M+1, l \neq M-1, M$ и имеют одинаковые четности.

Замечание 2. В силу замечания 1, в случае $c_1 \neq 0$ собственными значениями (с учетом кратности) задачи (1)-(3) являются корни уравнения

$$G(\lambda) = A_1\lambda + B_1,$$

которое имеет вид (6), где

$$G(\lambda) = \frac{c_1 y(1, \lambda) + a_1 y'(1, \lambda)}{a_1 y(1, \lambda) - c_1 y'(1, \lambda)}, \quad A_1 = (a_1^2 + c_1^2)/\sigma_1, \quad B_1 = (a_1 b_1 + c_1 d_1)/\sigma_1.$$

Следовательно, пользуясь вышеприведенными рассуждениями, можно получить аналогичные результаты и в случае $c_1 \neq 0$.

В главе II мы рассматриваем краевую задачу, возникающую в математической модели крутильных колебаний стержня со шкивами на концах. Решив соответствующую математическую задачу методом разделения переменных, мы получаем спектральную задачу

$$-y''(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0, 1), \quad (9)$$

$$y'(0) = -a_0 \lambda y(0), \quad (10)$$

$$y'(1) = (a_1 \lambda + b_1) y(1), \quad (11)$$

где $\lambda \in C$ – спектральный параметр, a_0, a_1, b_1 – действительные постоянные, причем $a_0 \neq 0$ и $a_1 \neq 0$.

Структура корневых подпространств и расположение собственных значений на вещественной оси задачи (9)-(11) в случае $a_0 > 0, a_1 > 0, b_1 = 0$ изучены Н.Ю. Капустиным, а в случаях $a_0 > 0, a_1 < 0, b_1 = 0$ и $a_0 < 0, a_1 < 0, b_1 = 0$ изучены З.С.Алиевым. В этих работах исследованы также базисные свойства в пространстве $L_p(0, 1), 1 < p < \infty$, систем корневых функций рассматриваемых задач.

Н.Ю. Капустиным доказано, что если $a_0 \neq -a_1$, то система собственных функций задачи с двумя произвольными удаленными функциями образует базис в пространстве $L_p(0, 1), 1 < p < \infty$, если $a_0 = -a_1$, то система собственных функций с двумя произвольными удаленными функциями, имеющие номера разной четности, образует базис в пространстве $L_p(0, 1), 1 < p < \infty$, а если $a_0 = -a_1$, то система собственных функций с двумя произвольными удаленными функциями, имеющие номера одинаковой четности, неполна и не минимальна в $L_p(0, 1), 1 < p < \infty$. З.С.Алиевым найдены так необходимые, также и достаточные условия базисности в $L_p(0, 1), 1 < p < \infty$, систем корневых функций задачи с двумя удаленными корневыми функциями.

В этой главе мы изучаем структуру корневых подпространств и расположения собственных значений на вещественной оси (комплексной плоскости), исследуем базисные свойства в пространстве $L_p(0, 1)$, $1 < p < \infty$, подсистем корневых функций задачи (9)-(11) в случае $a_0 < 0$, $a_1 < 0$, $b_1 \neq 0$.

В 2.1. дается операторная интерпретация краевой задачи (9)-(11). В гильбертовом пространстве $H = L_2(0, 1) \oplus \mathbb{C}^2$ со скалярным произведением

$$(\hat{y}, \hat{u}) = (\{y(x), m, n\}, \{u(x), s, t\}) = (y, u)_{L_2} + |a_0|^{-1} m \bar{s} + |a_1|^{-1} n \bar{t}.$$

определим оператор

$$L\hat{y} = L\{y(x), m, n\} = \{-y''(x), y'(0), y'(1) - b_1 y(1)\},$$

на области определения

$$D(L) = \{ \{y, m, n\} \in H : y, y' \in AC(0, 1), -y'' \in L_2(0, 1), \\ m = -a_0 y(0), n = a_1 y(1) \},$$

которая всюду плотно в H . Очевидно, оператор L определен в H корректно. Задача (9)-(11) эквивалентна задаче на собственные значения

$$L\hat{y} = \lambda \hat{y}, \quad \hat{y} \in D(L).$$

Определим оператор $J : H \rightarrow H : J\{y, m, n\} = \{y, -m, -n\}$.

Теорема 6. *Оператор J является унитарным и симметричным в H со спектром состоящим из двух собственных значений: -1 с кратностью 2 и 1 с бесконечной кратностью.*

Теорема 7. *Оператор JL самосопряжен, ограничен снизу и имеет компактную резольвенту в H .*

В силу теоремы 6 оператор $J : H \rightarrow H$ порождает пространство Понтрягина $\Pi_2 = L_2(0, 1) \oplus \mathbb{C}^2$ с внутренним произведением (J – метрикой)

$$[\hat{y}, \hat{u}] = (\hat{y}, \hat{u})_{\Pi_2} = (\{y, m, n\}, \{u, s, t\})_{\Pi_2} = (y, u)_{L_2} + a_0^{-1} m \bar{s} + a_1^{-1} n \bar{t}.$$

Лемма 5. *Оператор L является J -самосопряженным в Π_2 .*

Система корневых векторов $\{\hat{y}_k\}_{k=1}^\infty$, $\hat{y}_k = \{y_k(x), m_k, n_k\}$, оператора L образует базис Рисса в H .

В 2.2 изложена свойства решений задачи (9)-(10).

Решение уравнения (9) $y(x, \lambda) = a_0 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x - \cos \sqrt{\lambda} x$

удовлетворяет начальным условиям $y(0, \lambda) = -1$, $y'(0, \lambda) = a_0 \lambda$.

Собственные значения краевой задачи (9), (10) и $y(1) = 0$ являются вещественными, простыми и образуют неограниченно возрастающую последовательность $\mu_0 < 0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$, в то время как собственные значения краевой задачи (9), (10) и $y'(1) = 0$ являются вещественными, простыми, за исключением случая $a_0 = -1$, когда $\lambda = 0$ является двукратным собственным значением, и образуют неограниченно возрастающую последовательность $\nu_0 < \nu_1 < \dots$.

Заметим, что функция $F(\lambda) = y'(1, \lambda)/y(1, \lambda)$ определена на множестве $B \equiv (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k \right)$, где $B_k = (\mu_{k-1}, \mu_k)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mu_{-1} = -\infty$ и является мероморфной функцией конечного порядка, ν_k и μ_k , $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ – нули и полюсы этой функций соответственно.

Очевидно, что собственными значениями (с учетом кратности) задачи (9)-(11), являются корни уравнения

$$F(\lambda) = a_1 \lambda + b_1.$$

Лемма 6. *Справедливы следующие соотношения*

$$\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = - \frac{\int_0^1 y^2(x, \lambda) dx + a_0}{y^2(1, \lambda)}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} F(\lambda) = +\infty, \quad \lambda \in K.$$

Лемма 7. *Имеет место представление*

$$F(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda c_k}{\mu_k (\lambda - \mu_k)},$$

где $c_k = \operatorname{res}_{\lambda=\mu_k} F(\lambda) = y'_x(1, \lambda)/y'_\lambda(1, \lambda)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, и $c_0 < 0$, $c_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$.

В 2.3. изучаются структура корневых подпространств и расположение собственных значений на вещественной оси (комплексной плоскости) задачи (9)-(11).

Теорема 8. *В случае $b_1 < 0$ собственные значения задачи (9))-(11) являются вещественными и простыми, при этом B_1 содержит два собственных значения, а B_k , $k = 0, 2, \dots$, – одно собственное значение. В случае $b_1 > 0$ имеет место одно из следующих утверждений: (i) все собственные значения задачи (9)-(11)*

вещественны, при этом B_1 содержит алгебраически два (либо два простых, либо одно двукратное) собственных значения, а $B_k = (\mu_{k-1}, \mu_k)$, $k=0, 2, 3, \dots$, – одно простое собственное значение; (ii) все собственные значения задачи (9)-(11) вещественны, при этом B_1 не содержит собственных значений, в то же время существует неотрицательное целое число M ($M \geq 2$) такое, что B_M содержит алгебраически три (либо три простых, либо одно двукратное и одно простое, либо одно трехкратное) собственных значения, а $B_k = (\mu_{k-1}, \mu_k)$, $k=0, 2, 3, \dots$, $k \neq M$, – одно простое собственное значение; (iii) задача (9)-(11) имеет одну пару невещественных сопряженных друг к другу собственных значений, при этом B_1 не содержит собственных значений, а $B_k = (\mu_{k-1}, \mu_k)$, $k=0, 2, 3, \dots$, содержит одно простое собственное значение.

В 2.4. установлены условия базисности в пространстве $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, подсистем корневых функции задачи (9)-(11).

Пусть $\{\hat{g}_k^*\}_{k=0}^\infty$, $\hat{g}_k^* = \{g_k^*(x), s_k^*, t_k^*\}$ – система корневых векторов оператора L^* сопряженный к оператору L .

Обозначим: $m(\lambda) = -a_0 y(0, \lambda)$, $n(\lambda) = a_1 y(1, \lambda)$.

Лемма 8. Справедливы следующие утверждения:

$\hat{g}_k^* = \bar{J} \bar{y}_k$, если $\wp(\lambda_k) = 1$; $\hat{g}_k^* = J \hat{y}_{k+1}^* + \bar{p}_k J \hat{y}_k$, $\hat{g}_{k+1}^* = J \hat{y}_k$, если $\wp(\lambda_k) = 2$; $\hat{g}_k^* = J \hat{y}_{k+2}^* + \bar{d}_k J \hat{y}_{k+1}^* + \bar{h}_k J \hat{y}_k$, $\hat{g}_{k+1}^* = J \hat{y}_{k+1}^* + \bar{d}_k J \hat{y}_k$, $\hat{g}_{k+2}^* = J \hat{y}_k$, если $\wp(\lambda_k) = 3$, где $\bar{y}_k = \{\bar{y}_k(x), \bar{m}_k, \bar{n}_k\}$, $\hat{y}_{k+1}^* = \{y_{k+1}^*(x), m_{k+1}^*, n_{k+1}^*\}$, $m_{k+1}^* = m'(\lambda_k) = 0$, $n_{k+1}^* = n'(\lambda_k)$, $\hat{y}_{k+2}^* = \{y_{k+2}^*(x), m_{k+2}^*, n_{k+2}^*\}$, $m_{k+2}^* = (1/2) \times m''(\lambda_k) = 0$, $n_{k+2}^* = (1/2) n''(\lambda_k)$, $\bar{c}_k, \bar{d}_k, \bar{h}_k$ – произвольные постоянные.

Числа δ_k , $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, определим следующим образом:

$$\delta_k = \begin{cases} [\hat{y}_k, \bar{y}_k], & \text{если } \wp(\lambda_k) = 1, \\ [\hat{y}_k, \hat{y}_{k+1}^*], & \text{если } \wp(\lambda_k) = 2, \\ \|\hat{y}_{k+1}^*\|_{\Pi_2}^2, & \text{если } \wp(\lambda_k) = 3. \end{cases} \quad (12)$$

где $\|\cdot\|_{\Pi_2}$ – норма в пространстве Π_2 .

Лемма 9. $\delta_k \neq 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Теорема 9. Элемент $\hat{\mathcal{G}}_k = \{\mathcal{G}_k(x), s_k, t_k\}$ системы $\{\hat{\mathcal{G}}_k\}_{k=0}^\infty$ сопряженной к системе $\{\hat{\mathcal{Y}}_k\}_{k=0}^\infty$, $\hat{\mathcal{Y}}_k = \{y_k(x), m_k, n_k\}$, определяется равенством $\hat{\mathcal{G}}_k = \bar{\delta}_k^{-1} \hat{\mathcal{G}}_k^*$, где $\hat{\mathcal{G}}_k^*$, $k=0, 1, \dots$, определяются леммой 8, а δ_k , $k=0, 1, \dots$, – формулой (12), при этом $\tilde{p}_k = -p_k - \delta_k^{-1} \|\hat{\mathcal{Y}}_{k+1}^*\|_{\Pi_2}^2$, если $\wp(\lambda_k) = 2$, $\tilde{d}_k = -d_k - \delta_k^{-1} [\hat{\mathcal{Y}}_{k+1}^*, \hat{\mathcal{Y}}_{k+2}^*]$, $\tilde{h}_k = -h_k - \delta_k^{-1} \|\hat{\mathcal{Y}}_{k+2}^*\|_{\Pi_2}^2 + \delta_k^{-2} [\hat{\mathcal{Y}}_{k+1}^*, \hat{\mathcal{Y}}_{k+2}^*]^2 + d_k (d_k + \delta_k^{-1} [\hat{\mathcal{Y}}_{k+1}^*, \hat{\mathcal{Y}}_{k+2}^*])$, если $\wp(\lambda_k) = 3$.

Основным результатом данной главы является следующая

Теорема 10. Пусть $r, l, r \neq l$ – произвольные фиксированные целые неотрицательные числа. Тогда система корневых функций $\{y_k(x)\}_{k=1, k \neq r, l}^\infty$ задачи (9)-(11) образует базис в пространстве $L_p(0, 1)$, $1 < p < \infty$, при $p = 2$ – базис Рисса, в следующих случаях:

(а) $b_1 < 0$ либо $b_1 > 0$ и имеет место утверждение (i) второй части теоремы 8 и $\wp(\lambda_1) = 1$: $r = 0$ и $l = 1$ или l является четным; $r = 1$ и l является нечетным; $r, l \geq 2$, r и l имеют разные четности;

(б) $b_1 > 0$ и имеет место утверждение (iii) второй части теоремы 8: $r = 0$, $l \geq 4$ и является четным; $r = 1$ либо $r = 2$ и $l \in \mathbb{N}$; $r, l \geq 3$, r и l имеют разные четности;

(в) $b_1 > 0$ и имеет место утверждение (i) второй части теоремы 8 и $\wp(\lambda_1) = 2$: $r = 0$, $l \geq 3$ и является нечетным; $r = 1$, $l = 2$ и $n_2^* \neq 0$; $r = 1$, $l \neq 2$ и либо $p_1 = -\delta_1^{-1} \|\hat{\mathcal{Y}}_2^*\|_{\Pi_2}^2$ и $n_2^* \neq 0$, либо $l = 0$, либо l является нечетным и $p_1 \neq -n_2^*/a_1(y_1(1) - y_1(1)) - \delta_1^{-1} \|\hat{\mathcal{Y}}_2^*\|_{\Pi_2}^2$; $r = 2$, $l \neq 1$ и либо $l = 0$, либо l является нечетным;

(г) $b_1 > 0$ и имеет место утверждение (ii) второй части теоремы 8: $r = 0$, l является четным и $l \neq M$, если M является четным, $l \neq M + 1$, если M является нечетным; $r, l \geq 1$ и либо $r, l \neq M$ и имеют разные четности, либо $r = M$ и l имеют одинаковые четности; $\wp(\lambda_{M-1}) = 2$: $r = M - 1$, $l = M$ и $n_M^* \neq 0$; $r = M - 1$, $l \neq M$ и либо $p_{M-1} = -\delta_{M-1}^{-1} \|\hat{\mathcal{Y}}_M^*\|_{\Pi_2}^2$ и $n_M^* \neq 0$, либо l и M имеют разные четности и

$p_{M-1} \neq -\frac{n_M^*}{a_1(y_l(1) - y_{M-1}(1))} - \delta_{M-1}^{-1} \|\hat{y}_M^*\|_{\Pi_2}^2$; $r = M$, $l \neq M-1$ и имеют одинаковые четности; $r = M+1$, $l \neq M-1, M$ и имеют одинаковые четности; $\wp(\lambda_M) = 2$: $r = M$, $l = M+1$ и $n_{M+1}^* \neq 0$; $r = M$, $l \neq M+1$ и либо $p_M = -\delta_M^{-1} \|\hat{y}_{M+1}^*\|_{\Pi_2}^2$ и $n_{M+1}^* \neq 0$, либо l и M имеют одинаковые четности и $p_M \neq -\frac{n_{M+1}^*}{a_1(y_l(1) - y_M(1))} - \delta_M^{-1} \|\hat{y}_{M+1}^*\|_{\Pi_2}^2$; $r = M-1$, $M+1$ $l \neq M$, и имеют одинаковые четности; $r = M+1$, $l \neq M-1, M$ и имеют одинаковые четности; $\wp(\lambda_{M-1}) = 3$: $r = M-1$, $l = M$ и либо $(h_{M-1} + \delta_{M-1}^{-1} (\|\hat{y}_{M+1}^*\|_{\Pi_2}^2 + d_{M-1}[\hat{y}_M^*, \hat{y}_{M+1}^*]))n_M^* = 0$, $(d_{M-1} + \delta_{M-1}^{-1}[\hat{y}_M^*, \hat{y}_{M+1}^*]) \times n_{M+1}^* \neq 0$, либо $n_M^* \neq 0$ и $h_{M-1} \neq (d_{M-1} + \delta_{M-1}^{-1}[\hat{y}_M^*, \hat{y}_{M+1}^*])(n_{M+1}^*/n_M^*) - \delta_{M-1}^{-1} (d_{M-1}[\hat{y}_M^*, \hat{y}_{M+1}^*] + \|\hat{y}_{M+1}^*\|_{\Pi_2}^2)$; $r = M-1$, $l = M+1$ и либо $n_M^* = 0$, $n_{M+1}^* \neq 0$, либо $n_M^* \neq 0$ и $n_{M+1}^* \neq (d_{M-1} + \delta_{M-1}^{-1}[\hat{y}_M^*, \hat{y}_{M+1}^*])n_M^*$; $r = M$, $l = M+1$ и $n_M^* \neq 0$; $r = M-1$, $l \neq M, M+1$ и $n_{M+1}^* - (d_{M-1} + \delta_{M-1}^{-1}[\hat{y}_M^*, \hat{y}_{M+1}^*])n_M^* - a_1(h_{M-1} + \delta_{M-1}^{-1} \|\hat{y}_{M+1}^*\|_{\Pi_2}^2 - \delta_{M-1}^{-2}[\hat{y}_M^*, \hat{y}_{M+1}^*]^2 - d_{M-1}(d_{M-1} + \delta_{M-1}^{-1}[\hat{y}_M^*, \hat{y}_{M+1}^*])(y_{M-1}(1) - y_l(1)) \neq 0$; $r = M$, $l \neq M-1, M$ и $n_M^* - (d_{M-1} + \delta_{M-1}^{-1}[\hat{y}_M^*, \hat{y}_{M+1}^*])(y_{M-1}(1) - y_l(1)) \neq 0$; $r = M+1$, $l \neq M-1, M$ и имеют одинаковые четности.

Имеет место также следующая

Теорема 11. Пусть $r, l, r \neq l$ – произвольные фиксированные целые неотрицательные числа. Тогда существует натуральное число $\tilde{k}$ ($\tilde{k} > M+1$) такое, что если $r, l \geq \tilde{k}$, то система корневых функций $\{y_k(x)\}_{k=1, k \neq r, l}^\infty$ задачи (9)-(11) образует базис в пространстве $L_p(0, 1)$, $1 < p < \infty$, при $p = 2$ – базис Рисса.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору наук по математике З.С.Алиеву за постоянное внимание к работе и ценные советы.

Опубликованные по теме диссертации работы:

1. Алиев З.С., Дуньямалиева А.А. Осцилляционные свойства собственных функций одной задачи четвертого порядка со спектральным параметром в граничном условии / BDU-nun "Hesablama riyaziyyatı" kafedrasının 50 illik yubileyinə həsr olunmuş elmi konfransın materialları, Bakı, 15-16 noyabr 2012-ci il, s. 97-100.
2. Aliyev Z.S., Duniyamaliyeva A.A., On defect basicity of the system of eigenfunctions of a spectral problem with a spectral parameter in the boundary conditions // Trans. NAS Azerbaijan, series phys.-tech. math. sci., math. and mech., 2012, v. 32, № 4, p. 21-28.
3. Алиев З.С., Дуньямалиева А.А. Базисные свойства корневых функций задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях // Доклады РАН, 2013, т. 451, № 5, с. 487-491.
4. Алиев З.С., Дуньямалиева А.А. Некоторые спектральные свойства задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях / Тезисы международной конференции посвященной 55-летию Института Математики и Механики НАН Азербайджана, Баку, 15-16 мая 2014, с. 41-43.
5. Алиев З.С., Дуньямалиева А.А. Дефектная базистность системы корневых функций задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях // Дифференциальные уравнения, 2015, т. 51, № 10, с. 1259-1276.
6. Duniyamaliyeva A.A., Some spectral properties of the boundary value problem with spectral parameter in the boundary condition // Proc. IMM NAS Azerbaijan, 2014, v. 40, № 2, p. 52-64.
7. Duniyamaliyeva A.A., Structure of root subspace and basis properties of root functions of the boundary problem with spectral parameter in the boundary conditions / Abstracts of Azerbaijan-Turkey-Ukrainian International Conference MADEA-7 of Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications, 2015, September 08-13, Baku-Azerbaijan, p. 46
8. Duniyamaliyeva A.A., Basis properties in the space $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, of root functions of the boundary value problem with spectral parameter in the boundary conditions // Proc. IMM NAS Azerbaijan, 2015, v. 41, № 2, p. 77-82.

AİDA AGAİSA qızı DÜNYAMALİYEVA

SƏRHƏD ŞƏRTLƏRİNƏ SPEKTRAL PARAMETR DAXİL OLAN ŞTURM-LIUVİLL OPERATORUNUN SPEKTRAL XASSƏLƏRİ

XÜLASƏ

Dissertasiya işi sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olan Şturm-Liuvill məsələsinin spektral xassələrinin tədqiqinə həsr olunmuşdur. Baxılan məsələnin məxsusi funksiyalarının osillyasiya xassələri öyrənilmiş, məxsusi və qoşulmuş funksiyalar sisteminin $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, fəzasında bazislik xassələri araşdırılmışdır.

Dissertasiya işində aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

- məxsusi ədədlərin həqiqi oxda (kompleks müstəvidə) yerləşməsinin ümumi xarakteristikası verilmişdir;

- məxsusi funksiyaların osillyasiya xassələri öyrənilmişdir;

- məxsusi ədədlər və məxsusi funksiyalar üçün asimptotik düsturlar alınmışdır;

- məxsusi funksiyalar sisteminin alt sisteminin $L_2(0,1)$ fəzasında defekt ədədi 2 olan defekt bazisi əmələ gətirməsi üçün zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır;

- məxsusi funksiyalar sisteminin alt sisteminin $L_p(0,1)$, $1 < p < +\infty$, fəzasında defekt ədədi 2 olan defekt bazisi əmələ gətirməsi üçün kafi şərtlər tapılmışdır.

**SPEKTRAL PROPERTIES OF THE STURM-LIOUVILLE
OPERATOR WITH SPECTRAL PARAMETER IN THE
BOUNDARY CONDITIONS**

SUMMARY

The dissertation is dedicated to the investigation of spectral properties of the Sturm-Liouville problem with spectral parameter in boundary conditions. Studied the oscillation properties of eigenfunctions, investigated the basis properties in the space $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, of the system of eigen- and associated functions of this problems.

The following results were obtained in the dissertation work:

- the general characteristic of the location of the eigenvalues on the real axis (on the complex plane) are obtained;
- studied oscillation properties of eigenfunctions;
- received asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions;
- necessary and sufficient conditions of the defect basicity (with the defect number to equal 2) of the system of eigen- and associated functions in space $L_2(0,1)$ are obtained;
- sufficient conditions of the defect basicity (with the defect number to equal 2) of the system of of eigen- and associated functions in space $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, are obtained.

**AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU**

Əlyazması hüququnda

AİDA AGAİSA QIZI DÜNYAMALİYEVA

**SƏRHƏD ŞƏRTLƏRİNƏ SPEKTRAL PARAMETR DAXİL
OLAN ŞTURM-LIUVİLL OPERATORUNUN SPEKTRAL
XASSƏLƏRİ**

1202.01 – Analiz və funksional analiz

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı – 2016