

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

КЯМАЛЯ РАЗИМ кызы РАГИМОВА

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОГРАНИЧЕННОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ
СУБЛИНЕЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ
ТИПА МОРРИ**

1202.01 - Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

Баку – 2016

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

KAMALƏ RAZİM qızı RƏHİMOVA

**BİR SİNİF ANİZOTROP SUBXƏTTİ OPERATORLARIN
MORRİ TİPLİ FƏZALARDA MƏHDUDLUĞU**

1202.01 – Analiz və funksional analiz

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı - 2016

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

KAMALƏ RAZİM QIZI RƏHİMOVA

**BİR SİNİF ANİZOTROP SUBXƏTTİ OPERATORLARIN
MORRİ TİPLİ FƏZALARDA MƏHDUDLUĞU**

1202.01 – Analiz və funksional analiz

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı - 2016

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

КЯМАЛЯ РАЗИМ кызы РАГИМОВА

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОГРАНИЧЕННОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ
СУБЛИНЕЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ
ТИПА MORRI**

1202.01 - Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

Баку – 2016

Dissertasiya işi **AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun “Riyazi analiz”** şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər:

AMEA-nın müxbir üzvü, prof. **Vaqif S. Quliyev**

Rəsmi opponentlər:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Sadiq K. Abdullayev**

(Bakı Dövlət Universiteti)

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dos. **Mübariz Q. Hacıbəyov**

(Milli Aviasiya Akademiyası)

Aparıcı təşkilat:

Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universitetinin “Ümumi və Tətbiqi riyaziyyat” kafedrası.

Dissertasiyanın müdafiəsi 25 noyabr 2016-ci il saat 16⁰⁰-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün D 01.111 Dissertasiya Şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç. 9.

Avtoreferat göndərilib 24 oktyabr 2016-cı il.

AMEA RMİ-nin D 01.111

Dissertasiya Şurasının

elmi katibi

r.e.d., dos. Rövşən Bəndəliyev

Работа выполнена в отделе «**Математический анализ**» Института Математики и Механики НАН Азербайджана.

Научный руководитель:

член-корр. НАН Азербайджана, проф. **Вагиф С. Гулиев**

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор **Садиг К. Абдуллаев**

(Бакинский Государственный Университет)

кандидат физико-математических наук, доцент **Мубариз Г. Гаджибеков**

(Национальная Авиационная Академия Азербайджана)

Ведущая организация:

Азербайджанский Государственный Университет Нефти и Промышленности кафедры «Общая и прикладная математика».

Защита диссертации состоится 25 ноября 2016 г. в 16⁰⁰ часов на заседании Диссертационного Совета Д 01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 24 октября 2016 года.

Ученый секретарь

Диссертационного Совета

Д 01.111 ИММ НАНА

д.м.н., доц. Ровшан Бандалиев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертация посвящена проблемам ограниченности анизотропного максимального оператора M^P , анизотропного дробно-максимального оператора M_α^P и анизотропного потенциала Рисса I_α^P , а также их коммутаторов M_b^P , $M_{b,\alpha}^P$, $[b, I_\alpha^P]$, $|b, I_\alpha^P|$ в анизотропных модифицированных пространствах Морри $\tilde{M}_{p,\lambda,P}(\mathbb{R}^n)$ и в анизотропных обобщенных пространствах Морри $M_{p,\varphi,P}$, где

$$M_\alpha^P f(x) = \sup_{r>0} |E(x,r)|^{-1+\alpha/\gamma} \int_{E(x,r)} |f(y)| dy, \quad 0 \leq \alpha < \gamma,$$

$$I_\alpha^P f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{\rho(x-y)^{\gamma-\alpha}} dy, \quad 0 < \alpha < \gamma,$$

$$M_{b,\alpha}^P f(x) = \sup_{r>0} |E(x,r)|^{-1+\alpha/\gamma} \int_{E(x,r)} |b(x)-b(y)| |f(y)| dy, \quad 0 \leq \alpha < \gamma,$$

$$[b, I_\alpha^P] f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{b(x)-b(y)}{\rho(x-y)^{\gamma-\alpha}} f(y) dy, \quad 0 < \alpha < \gamma,$$

$$|b, I_\alpha^P| f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|b(x)-b(y)|}{\rho(x-y)^{\gamma-\alpha}} |f(y)| dy, \quad 0 < \alpha < \gamma.$$

В диссертации рассматриваются анизотропные расстояния $\rho(x)$ (анизотропные метрики $d(x,y) = \rho(x-y)$), с их помощью определены и исследованы анизотропные максимальные функции $M^P f$, анизотропные дробно-максимальные функции $M_\alpha^P f$ и анизотропный потенциал Рисса $I_\alpha^P f$ в анизотропных модифицированных пространствах Морри $\tilde{M}_{p,\lambda,P}(\mathbb{R}^n)$ и в анизотропных обобщенных пространствах Морри $M_{p,\varphi,P}$. Исследованы коммутатор анизотропной максимальной функции $M_b^P f$, коммутатор анизотропной дробно-максимальной функции $M_{b,\alpha}^P f$ и коммутаторы анизотропного потенциала Рисса $[b, I_\alpha^P] f$, $|b, I_\alpha^P| f$ в анизотропных обобщенных пространствах Морри $M_{p,\varphi,P}$.

Применение метода теории потенциала к решению многочисленных краевых задач, встречающихся в теории дифференциальных уравнений в частных производных, в задачах теории аналитических функций, а также в задачах механики имеет богатую

историю и успешную практику. Различные свойства потенциалов Рисса были исследованы в работах М. Рисса, Г.Х. Харди, Дж.Е. Литтлвуда, С.Л. Соболева, И. Стейна, Г. Вейса, О.В.Бесова, П.И. Лизоркина, С.Г. Самко, В.М. Кокилашвили, А.Д. Гаджиева, Б. Рубина, С.К. Абдуллаева, В.С. Гулиева, Р.М. Рзаева и др. Изложение ряда свойств потенциалов Рисса содержится в монографиях И. Стейна¹, С.Г. Самко², Б. Рубина,³ и В.С. Гулиева⁴.

Наряду с пространствами Лебега, разнообразные применения в математике находит и ряд других пространств, с которыми мы встретимся в этой диссертации. Многие из них состоят из функций, обладающих определенными свойствами гладкости: имеют производные, удовлетворяющие условиям типа условий Гёльдера и т.п. В диссертации мы остановимся на одном типе пространств, в определении которого не требуется какая-либо гладкость. Конечно, это не означает, что функции из этих пространств не являются, в каком-то смысле, гладкими. Классические пространства Морри $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ были введены Ч. Морри⁵ для изучения локального поведения решений эллиптических уравнений с частными производными второго порядка. Пространства Морри находят большое применение в теории дифференциальных уравнений с частными производными как в линейной, так и нелинейной теории. Для рассмотрения свойств и приложений классических пространств Морри мы отмечаем работу J. Peetre⁶.

В диссертации, рассматриваются задачи об ограниченности анизотропного максимального оператора M^P , анизотропного дробно-максимального оператора M_α^P , анизотропного потенциала Рисса I_α^P , а также коммутатора анизотропного максимального оператора M_b^P и коммутаторов анизотропного потенциала Рисса $[b, I_\alpha^P]$, $|b, I_\alpha^P|$ в анизотропных обобщенных пространствах Морри $M_{p,\varphi,P}$. Получена оценка для L_p -нормы анизотропной максимальной функции и дробно-

¹ Stein E. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973, 342 с.

² Самко С.Г. Гиперсингулярные интегралы и их приложения. Изд. Ростовского ун-та, 1984, 208 с.

³ Rubin B., Fractional integrals and potentials. Addison Wesley and Longman Limited, Essex, 1996.

⁴ Гулиев В.С., Функциональные пространства, интегральные операторы и двухвесовые оценки на однородных группах. Некоторые приложения. Баку: Чашыоглы, 1999, 332 с.

⁵ C. B. Morrey, On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. Trans. A.M.S. 43 (1938), p. 126-166.

⁶ J. Peetre, On the theory of $L^{p,\lambda}$ spaces. Journal Funct. Analysis 4 (1969), 71-87.

максимальной функции по эллипсоиду, с помощью которой эта задача сводится к задаче об ограниченности супремального оператора в весовых L_p -пространствах на полуоси на конусе неотрицательных невозрастающих функций. А также, получена оценка для L_p -нормы анизотропного потенциала Рисса по эллипсоиду, с помощью которой эта задача сводится к задаче об ограниченности оператора Харди в весовых L_p -пространствах на полуоси на конусе неотрицательных невозрастающих функций. Это позволяет получить необходимые и достаточные условия ограниченности анизотропного дробно-максимального оператора, анизотропного потенциала Рисса и их коммутаторов в анизотропных модифицированных пространствах Морри $\tilde{M}_{p,\lambda,p}(R^n)$ и в анизотропных обобщенных пространствах Морри $M_{p,\varphi,p}$ для всех допустимых значений параметров.

Цель работы. Цель диссертации состоит в изучении ограниченности анизотропного максимального оператора M^P , анизотропного дробно-максимального оператора M_α^P и анизотропного потенциала Рисса I_α^P , а также их коммутаторов M_b^P , $M_{b,\alpha}^P$, $[b, I_\alpha^P]$ в анизотропных модифицированных пространствах Морри $\tilde{M}_{p,\lambda,p}(R^n)$ и в анизотропных обобщенных пространствах Морри $M_{p,\varphi,p}$.

Общая методика исследований. В работе использованы методы теории интегральных операторов, гармонического анализа, теории функциональных пространств, максимальных функций и функционального анализа.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты:

- получены необходимые и достаточные условия ограниченности анизотропного дробно-максимального оператора в анизотропных модифицированных пространствах Морри;
- получены необходимые и достаточные условия ограниченности анизотропного дробно-максимального оператора и его коммутатора в анизотропных обобщенных пространствах Морри;
- получены необходимые и достаточные условия ограниченности анизотропного потенциала Рисса в анизотропных модифицированных пространствах Морри;

- получены необходимые и достаточные условия ограниченности анизотропного потенциала Рисса и его коммутатора в анизотропных обобщенных пространствах Морри;

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, могут найти приложение в теории дифференциальных уравнений в частных производных, а также в некоторых задачах математической физики и механики. Результаты диссертации являются новыми в теории потенциалов.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на семинарах отдела "Математический анализ" ИММ НАН Азербайджана (рук. чл.-корр. НАН Азербайджана, проф. В.С. Гулиев), на семинарах отдела "Негармонический анализ" (рук. чл.-корр. НАН Азербайджана, проф. Б.Т. Билалов), на семинарах отдела "Функциональный анализ" (рук. д.ф.-м.н., проф. Г.И. Асланов), на семинарах отдела "Теория функций" (рук. д.ф.-м.н. В.Э. Исмаилов), на семинарах отдела "Дифференциальные уравнения" (рук. д.ф.-м.н., проф. А.Б. Алиев), на семинарах кафедры "Математический анализ" БГУ (рук. д.ф.-м.н., проф. С.С. Мирзоев), на семинарах кафедры "Математический анализ" АГПУ (рук. д.ф.-м.н., проф. В.М. Курбанов), а также на Республиканской конференции по математике и механике, посвященной 100-летию юбилею ак. И.И. Ибрагимова (2012), на Международной конференции по математике "On Actual Problems On Mathematics And Informatics", посвященной 90-летию юбилею Гейдара Алиева (2013).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 9 работ, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав и списка литературы. Диссертация изложена на 118 страницах. Список литературы включает 137 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность работы, приведен обзор ранее полученных результатов по теме диссертации, дан их краткий анализ и сформулированы основные результаты диссертации.

Пусть P действительная матрица размерности $n \times n$, все собственные значения, которой имеют положительную вещественную часть. Пусть $A_t = t^P$ ($t > 0$), и положим $\gamma = trP$. Тогда существует

квази-расстояние ρ , согласованное с P так, что

(a) $\rho(A_t x) = t\rho(x)$, $t > 0$, для каждого $x \in \mathbb{R}^n$;

(b) $\rho(0) = 0$, $\rho(x) = \rho(-x) \geq 0$

и $\rho(x - y) \leq k(\rho(x - z) + \rho(y - z))$;

(c) $dx = \rho^{\gamma-1} d\sigma(w) d\rho$, где $\rho = \rho(x)$, $w = A_{\rho^{-1}} x$

и $d\sigma(w)$ есть C^∞ мера на эллипсоиде $\{w : \rho(w) = 1\}$.

В дальнейшем, анизотропный шар (эллипсоид) с центром в точке x и радиуса t будем обозначать через $E(x, t) = \{y \in \mathbb{R}^n : \rho(x - y) < t\}$.

Определение 1. Пусть $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda \leq \gamma$ и $[t]_1 = \min\{1, t\}$. Обозначим через $M_{p, \lambda, P}(\mathbb{R}^n)$ анизотропное пространство Морри, а через $\tilde{M}_{p, \lambda, P}(\mathbb{R}^n)$ модифицированное анизотропное пространство Морри, множество локально интегрируемых функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, с конечной нормой

$$\|f\|_{M_{p, \lambda, P}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \left(t^{-\lambda} \int_{E(x, t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p},$$

$$\|f\|_{\tilde{M}_{p, \lambda, P}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \left([t]_1^{-\lambda} \int_{E(x, t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p},$$

соответственно.

Определение 2. Пусть $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda \leq \gamma$. Обозначим через $WM_{p, \lambda, P}(\mathbb{R}^n)$ слабое анизотропное пространство Морри, а через $W\tilde{M}_{p, \lambda, P}(\mathbb{R}^n)$ слабое модифицированное анизотропное пространство Морри, множество локально интегрируемых функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ с конечной нормой

$$\|f\|_{WM_{p, \lambda, P}} = \sup_{r > 0} r \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \left(t^{-\lambda} |\{y \in E(x, t) : |f(y)| > r\}| \right)^{1/p},$$

$$\|f\|_{W\tilde{M}_{p, \lambda, P}} = \sup_{r > 0} r \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \left([t]_1^{-\lambda} |\{y \in E(x, t) : |f(y)| > r\}| \right)^{1/p},$$

соответственно.

Говорят, что локально-интегрируемая функция b из $BMO_P(\mathbb{R}^n)$, если

$$\|b\|_{BMO_P} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{|E(x, r)|} \int_{E(x, r)} |b(y) - b_{E(x, r)}| dy < \infty,$$

где

$$b_{E(x, r)} = \frac{1}{|E(x, r)|} \int_{E(x, r)} b(y) dy.$$

Определение 3. Пусть $1 \leq p < \infty$. Обозначим через $M_{p, \varphi, P}$ анизотропное обобщенное пространство Морри, пространство всех функций $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ с конечной нормой

$$\|f\|_{M_{p, \varphi, P}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \varphi(x, r)^{-1} |E(x, r)|^{-1/p} \|f\|_{L_p(E(x, r))}.$$

В 1.1.2 были получены следующие результаты.

Лемма 1. Пусть $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1 \leq \gamma$. Тогда

$$M_{p, \lambda_1, P}(\mathbb{R}^n) \subset M_{p, \lambda_2, P}(\mathbb{R}^n) \quad \text{и} \quad \|f\|_{\tilde{M}_{p, \lambda_2, P}} \leq \|f\|_{\tilde{M}_{p, \lambda_1, P}}.$$

Лемма 2. Пусть $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda \leq \gamma$. Тогда

$$\tilde{M}_{p, \lambda, P}(\mathbb{R}^n) = M_{p, \lambda, P}(\mathbb{R}^n) \cap L_p(\mathbb{R}^n) \quad \text{и} \quad \|f\|_{\tilde{M}_{p, \lambda, P}} = \max\{\|f\|_{M_{p, \lambda, P}}, \|f\|_{L_p}\}.$$

Лемма 3. Пусть $0 < \alpha < \gamma$ и $0 \leq \lambda \leq \gamma - \alpha$. Тогда для $(\gamma - \lambda)/\alpha \leq p \leq \gamma/\alpha$

$$\tilde{M}_{p, \lambda, P}(\mathbb{R}^n) \subset M_{1, \gamma - \alpha, P}(\mathbb{R}^n) \quad \text{и} \quad \|f\|_{M_{1, \gamma - \alpha, P}} \leq v_n^{\gamma/p} \|f\|_{\tilde{M}_{p, \lambda, P}}.$$

В 1.1.3 были получены следующие результаты.

Теорема 1. Пусть $0 < \alpha < \gamma$, $0 \leq \lambda < \gamma - \alpha$ и $1 \leq p \leq (\gamma - \lambda)/\alpha$.

1) Если $1 < p < (\gamma - \lambda)/\alpha$, то неравенство $\alpha/\gamma \leq 1/p - 1/q \leq \alpha/(\gamma - \lambda)$ является необходимым и достаточным условием для ограниченности оператора M_α^P из $\tilde{M}_{p, \lambda, P}(\mathbb{R}^n)$ в $\tilde{M}_{q, \lambda, P}(\mathbb{R}^n)$.

2) Если $p = 1 < (\gamma - \lambda)/\alpha$, то неравенство $\alpha/\gamma \leq 1 - 1/q \leq \alpha/(\gamma - \lambda)$ является необходимым и достаточным условием для ограниченности оператора M_α^P из $\tilde{M}_{1, \lambda, P}(\mathbb{R}^n)$ в $W\tilde{M}_{q, \lambda, P}(\mathbb{R}^n)$.

3) Если $(\gamma - \lambda)/\alpha \leq p \leq \gamma/\alpha$, тогда оператор M_α^P ограничен из $\tilde{M}_{p, \lambda, P}(\mathbb{R}^n)$ в $L_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 4. Пусть $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \alpha < \gamma/p$, $1/q = 1/p - \alpha/\gamma$. Тогда для $p > 1$ и любого эллипсоида $E = E(x, r)$ в $\mathbb{R}^n$, неравенство

$$\|M_\alpha^P f\|_{L_q(E(x, r))} \leq r^{\gamma/q} \sup_{t > 2r} t^{-\gamma/q} \|f\|_{L_p(E(x, t))} \quad (1)$$

выполняется для всех $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Более того, для $p = 1$, неравенство

$$\|M_\alpha^P f\|_{WL_q(E(x, r))} \leq r^{\gamma/q} \sup_{t > 2r} t^{-\gamma/q} \|f\|_{L_1(E(x, t))} \quad (2)$$

выполняется для всех $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Функция $\varphi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ называется почти возрастающей (соответственно почти убывающей), если существует такая постоянная $C > 0$, что $\varphi(r) \leq C\varphi(s)$ (соотв. $\varphi(r) \geq C\varphi(s)$) для $r \leq s$.

Обозначим через $\mathbf{G}_{p, \gamma}$ множество всех убывающих функций

$\varphi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ таких, что $t \in (0, \infty) \mapsto \varphi(t)t^{\frac{\gamma}{p}}$ является почти возрастающей.

Теорема 2 является одной из основных результатов первой главы, в которой получены необходимые и достаточные условия для ограниченности анизотропного дробно-максимального оператора M_α^P из обобщенного пространства Морри $M_{p, \varphi_1, P}(\mathbb{R}^n)$ в обобщенное пространство Морри $M_{q, \varphi_2, P}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2. Пусть $0 \leq \alpha < \gamma$ и $p, q \in [1, \infty)$.

1. Если $1 < p < \gamma/\alpha$ и $1/q = 1/p - \alpha/\gamma$, то условие

$$\sup_{t < r < \infty} r^{-\gamma/q} \operatorname{essinf}_{r < s < \infty} \varphi_1(x, s) s^{\gamma/p} \leq C \varphi_2(x, t), \quad (3)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, где $C > 0$ не зависит от x, t , является достаточным для ограниченности оператора M_α^P из $M_{p, \varphi_1, P}(\mathbb{R}^n)$ в $M_{q, \varphi_2, P}(\mathbb{R}^n)$.

2. Если функция φ_1 из $\mathbf{G}_{p, \gamma}$, то условие

$$t^\alpha \varphi_1(t) \leq C \varphi_2(t), \quad (4)$$

для всех $t > 0$, где $C > 0$ не зависит от t , является необходимым для

ограниченности оператора M_α^P из $M_{p, \varphi_1, P}(\mathbb{R}^n)$ в $M_{q, \varphi_2, P}(\mathbb{R}^n)$.

3. Пусть $1 < p < \gamma/\alpha$ и $1/q = 1/p - \alpha/\gamma$. Если функция $\varphi_1 \in \mathbf{G}_{p, \gamma}$ удовлетворяет условию

$$\sup_{t < r < \infty} r^\alpha \varphi_1(r) \leq C t^\alpha \varphi_1(t), \quad (5)$$

для всех $t > 0$, где $C > 0$ не зависит от t , то условие (10) является необходимым и достаточным для ограниченности оператора M_α^P из $M_{p, \varphi_1, P}(\mathbb{R}^n)$ в $M_{q, \varphi_2, P}(\mathbb{R}^n)$.

Аналогично, имеет место слабый вариант теоремы типа Спанне, в которой получены необходимые и достаточные условия для ограниченности анизотропного дробно-максимального оператора M_α^P из обобщенного пространства Морри $M_{p, \varphi_1, P}(\mathbb{R}^n)$ в обобщенное слабое пространство Морри $WM_{q, \varphi_2, P}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 3. Пусть $0 \leq \alpha < \gamma$ и $p, q \in [1, \infty)$.

1. Если $1 \leq p < \gamma/\alpha$ и $1/q = 1/p - \alpha/\gamma$, то условие (3) является достаточным для ограниченности оператора M_α^P из $M_{p, \varphi_1, P}(\mathbb{R}^n)$ в $WM_{q, \varphi_2, P}(\mathbb{R}^n)$.

2. Если функция φ_1 из $\mathbf{G}_{p, \gamma}$, то условие (11) является необходимым для ограниченности оператора M_α^P из $M_{p, \varphi_1, P}(\mathbb{R}^n)$ в $WM_{q, \varphi_2, P}(\mathbb{R}^n)$.

3. Пусть $1 \leq p < \gamma/\alpha$ и $1/q = 1/p - \alpha/\gamma$. Если функция $\varphi_1 \in \mathbf{G}_{p, \gamma}$ удовлетворяет условию (5), то условие (11) является необходимым и достаточным для ограниченности оператора M_α^P из $M_{p, \varphi_1, P}(\mathbb{R}^n)$ в $WM_{q, \varphi_2, P}(\mathbb{R}^n)$.

Следующий теорема, является результатом типа Адамса для дробно-максимального оператора.

Теорема 4. Пусть $1 \leq p < q < \infty$, $0 < \alpha < \gamma/p$ и $\varphi(x, t)$

удовлетворяет условиям

$$\sup_{r < t < \infty} t^{-\gamma} \operatorname{essinf}_{t < s < \infty} \varphi(x, s) s^\gamma \leq C \varphi(x, r), \quad (6)$$

и

$$\sup_{r < t < \infty} t^\alpha \varphi(x, t)^{1/p} \leq C r^{\alpha p/(q-p)},$$

где C не зависит от $x \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$.

Тогда оператор M_α^P ограниченно действует из $M_{p,\varphi^{1/p},P}$ в $M_{q,\varphi^{1/q},P}$ для $p > 1$, и из $M_{1,\varphi,P}$ в $WM_{q,\varphi^{1/q},P}$.

В случае $\varphi(x,t) = t^{(\lambda-\gamma)/p}$, $0 < \lambda < \gamma$ из Теоремы 4 мы получим результат типа Адамса для дробно-максимального оператора.

Следствие 1. Пусть $0 < \alpha < \gamma$, $1 \leq p < \gamma/\alpha$, $0 < \lambda < \gamma - \alpha p$ и $1/p - 1/q = \alpha/(\gamma - \lambda)$. Тогда для $p > 1$ оператор M_α^P ограниченно действует из $M_{p,\lambda,P}$ в $M_{q,\lambda,P}$, а для $p = 1$ из $M_{1,\lambda,P}$ в $WM_{q,\lambda,P}$.

В теореме 5 получены результаты типа Адамса, т.е. необходимые и достаточные условия для ограниченности анизотропного дробно-максимального оператора M_α^P из обобщенного пространства Морри $M_{p,\varphi,P}(\mathbb{R}^n)$ в обобщенное пространство Морри $M_{q,\varphi^{p/q},P}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 5. Пусть $0 \leq \alpha < \gamma$ и $1 < p \leq q < \infty$.

1. Если функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (6), то условие

$$t^\alpha \varphi(x,t) + \sup_{t < r < \infty} r^\alpha \varphi(x,r) \leq C \varphi(x,t)^{p/q}, \quad (7)$$

для всех $t > 0$, где $C > 0$ не зависит от t , является достаточным для ограниченности оператора M_α из $M_{p,\varphi,P}(\mathbb{R}^n)$ в $M_{q,\varphi^{p/q},P}(\mathbb{R}^n)$.

2. Если функция φ_1 из $\mathbf{G}_{p,\gamma}$, то условие

$$t^\alpha \varphi(t) \leq C \varphi(t)^{p/q}, \quad (8)$$

для всех $t > 0$, где $C > 0$ не зависит от t , является необходимым для ограниченности оператора M_α из $M_{p,\varphi,P}(\mathbb{R}^n)$ в $M_{q,\varphi^{p/q},P}(\mathbb{R}^n)$.

3. Если функция $\varphi \in \mathbf{G}_{p,\gamma}$ удовлетворяет условию

$$\sup_{t < r < \infty} r^\alpha \varphi(r) \leq C t^\alpha \varphi(t), \quad (9)$$

для всех $t > 0$, где $C > 0$ не зависит от t , то условие (8) является необходимым и достаточным для ограниченности оператора M_α из $M_{p,\varphi,P}(\mathbb{R}^n)$ в $M_{q,\varphi^{p/q},P}(\mathbb{R}^n)$.

Имеет место следующий, слабый вариант теоремы 5, теорема типа Адамса, в которой получены необходимые и достаточные

условия для ограниченности анизотропного дробно-максимального оператора M_α^P из обобщенного пространства Морри $M_{p,\varphi,P}(\mathbb{R}^n)$ в обобщенное слабое пространство Морри $WM_{q,\varphi^{p/q},P}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 6. Пусть $0 < \alpha < \gamma$ и $1 \leq p \leq q < \infty$.

1. Если функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (6), то условие (7) является достаточным для ограниченности оператора M_α^P из $M_{p,\varphi,P}(\mathbb{R}^n)$ в $WM_{q,\varphi^{p/q},P}(\mathbb{R}^n)$.

2. Если функция φ_1 из $\mathbf{G}_{p,\gamma}$, то условие (8) является необходимым для ограниченности оператора M_α^P из $M_{p,\varphi,P}(\mathbb{R}^n)$ в $WM_{q,\varphi^{p/q},P}(\mathbb{R}^n)$.

3. Если функция $\varphi \in \mathbf{G}_{p,\gamma}$ удовлетворяет условию (8), то условие (9) является необходимым и достаточным для ограниченности оператора M_α^P из $M_{p,\varphi,P}(\mathbb{R}^n)$ в $WM_{q,\varphi^{p/q},P}(\mathbb{R}^n)$.

Следствие 2. Пусть $0 \leq \alpha < \gamma$, $1 \leq p < q < \infty$ и $0 \leq \lambda \leq \gamma - \alpha p$. Тогда для ограниченности оператора M_α из $M_{p,\lambda,P}(\mathbb{R}^n)$ в $WM_{q,\lambda,P}(\mathbb{R}^n)$ необходимо и достаточно, чтобы $1/p - 1/q = \alpha/(\gamma - \lambda)$.

В Главе 1.1.5 были получены следующие результаты.

Лемма 5. Пусть $1 < p < \infty$, $0 \leq \alpha < \gamma/p$, $1/q = 1/p - \alpha/\gamma$ и $b \in BMO_p(\mathbb{R}^n)$. Тогда для любого эллипсоида $E = E(x,r)$ неравенство

$$\|M_{b,\alpha}^P f\|_{L_q(E(x,r))} \leq \|f\|_{BMO_p} r^{\gamma/q} \sup_{t > 2r} (1 + \ln \frac{t}{r}) t^{-\gamma/q} \|f\|_{L_p(E(x,t))}$$

выполняется для всех $f \in L_p^{Loc}(\mathbb{R}^n)$.

Следующая теорема является одним из основных результатов диссертации, в которой получены результаты типа Спанне, т.е. необходимые и достаточные условия для ограниченности коммутатора анизотропного дробно-максимального оператора $M_{b,\alpha}^P$ из обобщенного пространства Морри $M_{p,\varphi_1,P}(\mathbb{R}^n)$ в обобщенное пространство Морри $M_{q,\varphi_2,P}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 7. Пусть $b \in BMO_p(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \alpha < \gamma$ и $p, q \in [1, \infty)$.

1. Если $1 < p < \gamma/\alpha$ и $1/q = 1/p - \alpha/\gamma$, то условие

$$\sup_{r < t < \infty} (1 + \ln \frac{t}{r}) t^{\alpha - \gamma/p} \operatorname{ess\,inf}_{t < s < \infty} \varphi_1(x, s) s^{\gamma/p} \leq C \varphi_2(x, r), \quad (10)$$

где C не зависит от x и r , является достаточным для ограниченности оператора $M_{b,\alpha}^P$ из $M_{p,\varphi_1,P}(\mathbb{R}^n)$ в $M_{q,\varphi_2,P}(\mathbb{R}^n)$.

2. Если функция φ_1 из $\mathbf{G}_{p,\gamma}$, то условие

$$t^\alpha \varphi_1(t) \leq C \varphi_2(t), \quad (11)$$

для всех $t > 0$, где $C > 0$ не зависит от t , является необходимым для ограниченности оператора $M_{b,\alpha}^P$ из $M_{p,\varphi_1,P}(\mathbb{R}^n)$ в $M_{q,\varphi_2,P}(\mathbb{R}^n)$.

3. Пусть $1 < p < \gamma/\alpha$ и $1/q = 1/p - \alpha/\gamma$. Если функция $\varphi_1 \in \mathbf{G}_{p,\gamma}$ удовлетворяет условию

$$\sup_{t < r < \infty} (1 + \ln \frac{t}{r}) r^\alpha \varphi_1(r) \leq C t^\alpha \varphi_1(t), \quad (12)$$

для всех $t > 0$, где $C > 0$ не зависит от t , то условие (11) является необходимым и достаточным для ограниченности оператора $M_{b,\alpha}^P$ из $M_{p,\varphi_1,P}(\mathbb{R}^n)$ в $M_{q,\varphi_2,P}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 8. Пусть $1 < p < q < \infty$, $0 < \alpha < \gamma/p$, $b \in BMO_p(\mathbb{R}^n)$ и пусть $\varphi(x, t)$ удовлетворяет условиям

$$\sup_{r < t < \infty} (1 + \ln \frac{t}{r}) \varphi(x, t) \leq C \varphi(x, r) \quad (13)$$

и

$$\sup_{r < t < \infty} t^\alpha (1 + \ln \frac{t}{r}) \varphi(x, t)^{\frac{1}{p}} \leq C r^{\frac{\alpha p}{q-p}},$$

где C не зависит от $x \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$. Тогда оператор $M_{b,\alpha}^P$ ограниченно действует из $M_{p,\varphi^{1/p},P}$ в $M_{q,\varphi^{1/q},P}$.

В Теореме 9 получен один из основных результатов диссертации, в которой получены результаты типа Адамса, т.е. необходимые и достаточные условия для ограниченности коммутатора анизотропного дробно-максимального оператора M_α^P из обобщенного пространства Морри $M_{p,\varphi,P}(\mathbb{R}^n)$ в обобщенное пространство Морри $M_{q,\varphi^q,P}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 9. Пусть $0 \leq \alpha < n$, $1 < p \leq q < \infty$ и $b \in BMO_p(\mathbb{R}^n)$.

1. Если функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (12), то условие

$$t^\alpha \varphi(x, t) + \sup_{t < r < \infty} (1 + \ln \frac{t}{r}) r^\alpha \varphi(x, r) \leq C \varphi(x, t)^{p/q},$$

для всех $t > 0$, где $C > 0$ не зависит от t , является достаточным для ограниченности оператора $M_{b,\alpha}^P$ из $M_{p,\varphi,P}(\mathbb{R}^n)$ в $M_{q,\varphi^{p/q},P}(\mathbb{R}^n)$.

2. Если функция φ_1 из $\mathbf{G}_{p,\gamma}$, то условие (8) является необходимым для ограниченности оператора $M_{b,\alpha}^P$ из $M_{p,\varphi,P}(\mathbb{R}^n)$ в $M_{q,\varphi^{p/q},P}(\mathbb{R}^n)$.

3. Если функция $\varphi \in \mathbf{G}_{p,\gamma}$ удовлетворяет условию

$$\sup_{t < r < \infty} (1 + \ln \frac{t}{r}) r^\alpha \varphi(r) \leq C t^\alpha \varphi(t),$$

для всех $t > 0$, где $C > 0$ не зависит от t , то условие (8) является необходимым и достаточным для ограниченности оператора $M_{b,\alpha}^P$ из $M_{p,\varphi,P}(\mathbb{R}^n)$ в $M_{q,\varphi^{p/q},P}(\mathbb{R}^n)$.

В случае $\varphi(x, t) = t^{(\lambda-\gamma)/p}$, $0 < \lambda < \gamma$ из Теоремы 9 мы получим результат типа Адамса для дробно-максимального оператора.

Следствие 3. Пусть $b \in BMO_p(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \alpha < \gamma$, $1 < p < q < \infty$ и $0 \leq \lambda \leq \gamma - \alpha p$. Тогда для ограниченности оператора $M_{b,\alpha}^P$ из $M_{p,\lambda,P}(\mathbb{R}^n)$ в $M_{q,\lambda,P}(\mathbb{R}^n)$ необходимо и достаточно, чтобы $1/p - 1/q = \alpha/(\gamma - \lambda)$.

Следующая теорема является одним из основных результатов первого параграфа Главы II, в котором получены необходимые и достаточные условия для ограниченности анизотропного потенциала Рисса I_α^P из пространства $\tilde{M}_{p,\lambda,P}(\mathbb{R}^n)$ в $\tilde{M}_{q,\lambda,P}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < q < \infty$ и из пространства $\tilde{M}_{1,\lambda,P}(\mathbb{R}^n)$ в слабое пространство $\mathcal{M}_{q,\lambda,P}(\mathbb{R}^n)$, $1 < q < \infty$.

Теорема 10. Пусть $0 < \alpha < \gamma$, $0 \leq \lambda < \gamma - \alpha$ и $1 \leq p < (\gamma - \lambda)/\alpha$.

1) Если $1 < p < (\gamma - \lambda)/\alpha$, тогда условие $\alpha/\gamma \leq 1/p - 1/q \leq \alpha/(\gamma - \lambda)$ необходимо и достаточно для ограниченности оператора I_α^P из $\tilde{M}_{p,\lambda,P}(\mathbb{R}^n)$ в $\tilde{M}_{q,\lambda,P}(\mathbb{R}^n)$.

2) Если $p = 1 < (\gamma - \lambda)/\alpha$, тогда условие $\alpha/\gamma \leq 1 - 1/q \leq \alpha/(\gamma - \lambda)$

необходимо и достаточно для ограниченности оператора I_α^p из $\tilde{M}_{1,\lambda,P}(\mathbb{R}^n)$ в $WM_{q,\lambda,P}(\mathbb{R}^n)$.

3) Если $(\gamma - \lambda)/\alpha \leq p \leq \gamma/\alpha$, тогда оператор $\tilde{I}_{\alpha,P}$ ограниченно действует из $\tilde{M}_{p,\lambda,P}(\mathbb{R}^n)$ в $BMO_p(\mathbb{R}^n)$.

В 2.2.2 были получены следующие результаты.

Лемма 6. Пусть $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha < \gamma/p$, $1/q = 1/p - \alpha/\gamma$. Тогда для $p > 1$ и любого эллипсоида $E = E(x, r)$ неравенство

$$\|I_\alpha^p f\|_{L_q(E(x,r))} \leq \|f\|_{L_p(E(x, 2c_0 r))} + r^{\gamma/q} \int_{2c_0 r}^\infty \|f\|_{L_p(E(x,t))} t^{-1-\gamma/q} dt$$

выполняется для всех $f \in L_p^{Loc}(\mathbb{R}^n)$. Более того, для $p = 1$ неравенство

$$\|I_\alpha^p f\|_{WL_q(E(x,r))} \leq \|f\|_{L_1(E(x, 2c_0 r))} + r^{\gamma/q} \int_{2c_0 r}^\infty \|f\|_{L_1(E(x,t))} t^{-1-\gamma/q} dt$$

выполняется для всех $f \in L_1^{Loc}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 11. Пусть $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha < \gamma/p$, $1/q = 1/p - \alpha/\gamma$, и (ϕ_1, ϕ_2) удовлетворяет условию

$$\int_r^\infty \frac{\text{essinf}_{t < \tau < \infty} \phi_1(x, \tau) \tau^{\gamma/p}}{t^{\gamma/q+1}} dt \leq C \phi_2(x, r), \quad (14)$$

где C не зависит от x и r . Тогда для $p > 1$, I_α^p ограниченно действует из $M_{p,\phi_1,P}$ в $M_{q,\phi_2,P}$, а для $p = 1$, из $M_{1,\phi_1,P}$ в $WM_{q,\phi_2,P}$.

В Теореме 13 получены результаты типа Спанне, т.е. необходимые и достаточные условия для ограниченности анизотропного потенциала Рисса I_α^p из обобщенного пространства Морри $M_{p,\phi_1,P}(\mathbb{R}^n)$ в обобщенное пространство Морри $M_{q,\phi_2,P}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 12. Пусть $0 < \alpha < \gamma$ и $p, q \in [1, \infty)$.

1. Если $1 < p < \gamma/\alpha$ и $1/q = 1/p - \alpha/\gamma$, то условие (14) является достаточным для ограниченности оператора I_α^p из $M_{p,\phi_1,P}(\mathbb{R}^n)$ в $M_{q,\phi_2,P}(\mathbb{R}^n)$.

2. Если функция ϕ_1 из $G_{p,\gamma}$, то условие

$$t^\alpha \phi_1(t) \leq C \phi_2(t), \quad (15)$$

для всех $t > 0$, где $C > 0$ не зависит от t , является необходимым для ограниченности оператора I_α^p из $M_{p,\phi_1,P}(\mathbb{R}^n)$ в $M_{q,\phi_2,P}(\mathbb{R}^n)$.

3. Пусть $1 < p < \gamma/\alpha$ и $1/q = 1/p - \alpha/\gamma$. Если функция $\phi_1 \in G_{p,\gamma}$ удовлетворяет условию

$$\int_t^\infty r^{\alpha-1} \phi_1(r) dr \leq C t^\alpha \phi_1(t),$$

для всех $t > 0$, где $C > 0$ не зависит от t , то условие (15) является необходимым и достаточным для ограниченности оператора I_α^p из $M_{p,\phi_1,P}(\mathbb{R}^n)$ в $M_{q,\phi_2,P}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 13. Пусть $1 \leq p < q < \infty$, $0 < \alpha < \gamma/p$ и пусть $\phi(x, t)$ удовлетворяет условию (6) и

$$\int_r^\infty t^{\alpha-1} \phi(x, t)^p dt \leq C r^{-\frac{\alpha p}{q-p}},$$

где C не зависит от $x \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$. Тогда оператор I_α^p ограниченно действует из $M_{p,\phi^{1/p},P}$ в $M_{q,\phi^{1/q},P}$ для $p > 1$ и из $M_{1,\phi,P}$ в $WM_{q,\phi^{1/q},P}$.

В случае $\phi(x, t) = t^{-\lambda}$, $0 < \lambda < \gamma$ из Теоремы 14 мы получим следующий результат типа Адамса для анизотропного потенциала Рисса.

Следствие 4. Пусть $0 < \alpha < \gamma$, $1 \leq p < \gamma/\alpha$, $0 < \lambda < \gamma - \alpha p$ и $1/p - 1/q = \alpha/(\gamma - \lambda)$. Тогда для $p > 1$, оператор I_α^p ограниченно действует из $M_{p,\lambda,P}$ в $M_{q,\lambda,P}$, а для $p = 1$ из $M_{1,\lambda,P}$ в $WM_{q,\lambda,P}$.

В Главе 2.2.3 были получены следующие результаты.

Лемма 7. Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \gamma/p$, $1/q = 1/p - \alpha/\gamma$ и $b \in BMO_p$. Тогда для любого эллипсоида $E = E(x, r)$ неравенство

$$\|[b, I_\alpha^p]f\|_{L_q(E(x,r))} \leq \|b\|_* r^{\gamma/q} \int_{2c_0 r}^\infty (1 + \ln \frac{t}{r}) \|f\|_{L_p(E(x,t))} t^{-1-\gamma/q} dt$$

выполняется для всех $f \in L_p^{Loc}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 14. Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \gamma/p$, $1/q = 1/p - \alpha/\gamma$, и (ϕ_1, ϕ_2) удовлетворяют условию

$$\int_r^\infty (1 + \ln \frac{t}{r}) \frac{\text{essinf } \varphi_1(x, \tau) \tau^{\gamma/p}}{t^{\gamma/q+1}} dt \leq C \varphi_2(x, r), \quad (16)$$

где C не зависит от x и r . Тогда $[b, I_\alpha^P]$ ограниченно действует из $M_{p, \varphi_1, P}$ в $M_{q, \varphi_2, P}$.

В теореме 16 получены результаты типа Спанне, т.е. необходимые и достаточные условия для ограниченности коммутатора анизотропного потенциала Рисса $[b, I_\alpha^P]$ из обобщенного пространства Морри $M_{p, \varphi_1, P}(\mathbb{R}^n)$ в обобщенное пространство Морри $M_{q, \varphi_2, P}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 15. Пусть $0 < \alpha < \gamma$ и $p, q \in [1, \infty)$.

1. Если $1 < p < \gamma/\alpha$ и $1/q = 1/p - \alpha/\gamma$, то условие (16) является достаточным для ограниченности оператора $|b, I_\alpha^P|$ из $M_{p, \varphi_1, P}(\mathbb{R}^n)$ в $M_{q, \varphi_2, P}(\mathbb{R}^n)$.

2. Если функция φ_1 из $\mathbf{G}_{p, \gamma}$, то условие

$$t^\alpha \varphi_1(t) \leq C \varphi_2(t), \quad (17)$$

для всех $t > 0$, где $C > 0$ не зависит от t , является необходимым для ограниченности оператора $|b, I_\alpha^P|$ из $M_{p, \varphi_1, P}(\mathbb{R}^n)$ в $M_{q, \varphi_2, P}(\mathbb{R}^n)$.

3. Пусть $1 < p < \gamma/\alpha$ и $1/q = 1/p - \alpha/\gamma$. Если функция $\varphi_1 \in \mathbf{G}_{p, \gamma}$ удовлетворяет условию

$$\int_t^\infty (1 + \ln \frac{r}{t}) r^{\alpha-1} \varphi_1(r) dr \leq C t^\alpha \varphi_1(t),$$

для всех $t > 0$, где $C > 0$ не зависит от t , то условие (17) является необходимым и достаточным для ограниченности оператора $|b, I_\alpha^P|$ из $M_{p, \varphi_1, P}(\mathbb{R}^n)$ в $M_{q, \varphi_2, P}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 16. Пусть $1 < p < q < \infty$, $0 < \alpha < \gamma/p$, $b \in \text{BMO}_p$ и пусть $\varphi(x, t)$ удовлетворяет условию (10) и

$$\int_r^\infty (1 + \ln \frac{t}{r}) t^{\alpha-1} \varphi(x, t)^p dt \leq C r^{-\frac{\alpha p}{q-p}},$$

где C не зависит от $x \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$. Тогда оператор $[b, I_\alpha^P]$ ограниченно действует из $M_{p, \varphi^{1/p}, P}$ в $M_{q, \varphi^{1/q}, P}$.

В случае $\varphi(x, t) = t^{(\lambda-\gamma)/p}$, $0 < \lambda < \gamma$ из Теоремы 17 мы получим ниже указанный результат типа Адамса для коммутатора анизотропного потенциала Рисса.

Следствие 5. Пусть $0 < \alpha < \gamma$, $1 < p < \gamma/\alpha$, $0 < \lambda < \gamma - \alpha p$, $1/p - 1/q = \alpha/(\gamma - \lambda)$ и $b \in \text{BMO}_p$. Тогда оператор $[b, I_\alpha^P]$ ограниченно действует из $M_{p, \lambda, P}$ в $M_{q, \lambda, P}$.

Следующая теорема является одним из основных результатов диссертации, в котором получены результаты типа Адамса, т.е. необходимые и достаточные условия для ограниченности коммутатора анизотропного потенциала Рисса $|b, I_\alpha^P|$ из обобщенного пространства Морри $M_{p, \varphi, P}(\mathbb{R}^n)$ в обобщенное пространство Морри $M_{q, \varphi^{p/q}, P}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 17. Пусть $0 \leq \alpha < \gamma$, $1 < p \leq q < \infty$ и $b \in \text{BMO}_p(\mathbb{R}^n)$.

1. Если функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (13), то условие

$$t^\alpha \varphi(x, t) + \int_t^\infty (1 + \ln \frac{r}{t}) r^{\alpha-1} \varphi(x, r) dr \leq C \varphi(x, t)^{p/q},$$

для всех $t > 0$, где $C > 0$ не зависит от t , является достаточным для ограниченности оператора $|b, I_\alpha^P|$ из $M_{p, \varphi, P}(\mathbb{R}^n)$ в $M_{q, \varphi^{p/q}, P}(\mathbb{R}^n)$.

2. Если функция φ_1 из $\mathbf{G}_{p, \gamma}$, то условие (15) является необходимым для ограниченности оператора $|b, I_\alpha^P|$ из $M_{p, \varphi, P}(\mathbb{R}^n)$ в $M_{q, \varphi^{p/q}, P}(\mathbb{R}^n)$.

3. Если функция $\varphi \in \mathbf{G}_{p, \gamma}$ удовлетворяет условию

$$\int_t^\infty (1 + \ln \frac{r}{t}) r^{\alpha-1} \varphi(r) dr \leq C t^\alpha \varphi(t),$$

для всех $t > 0$, где $C > 0$ не зависит от t , то условие (15) является необходимым и достаточным для ограниченности оператора $|b, I_\alpha^P|$ из $M_{p, \varphi, P}(\mathbb{R}^n)$ в $M_{q, \varphi^{p/q}, P}(\mathbb{R}^n)$.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, чл.-корр. НАН Азербайджана, доктору физико-математических наук, профессору В.С. Гулиеву за постановку задачи, обсуждение полученных результатов и постоянное внимание к диссертационной работе.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. V.S. Guliyev, K. Rahimova, Parabolic fractional maximal operator and modified parabolic Morrey spaces. // Journal of Function Spaces and Applications, 2012, Article ID 543475, 20 pages, 2012.
2. K. Rahimova, Spanne type boundedness of the parabolic fractional maximal operator in generalized Morrey spaces.// International Conference in Functions theory and problems of harmonic analysis, Baku, from 28 February to 01 March, 2012, pp. 201-203.
3. V.S. Guliyev, K. Rahimova, Adams type boundedness of the parabolic fractional maximal operator in generalized Morrey spaces.// International Conference in Functions theory and problems of harmonic analysis, Baku, 28 February - 01 March, 2012, pp. 203-205.
4. V.S. Guliyev, K.R. Rahimova, Parabolic fractional maximal operator in parabolic generalized Morrey spaces. // Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb. 37 (2012), 51-66.
5. V.S. Guliyev, K. Rahimova, Parabolic fractional maximal operator and modified parabolic Morrey spaces. // Abstracts on International Conference On Actual Problems On Mathematics And Informatics (APMI2013), Baku, Azerbaijan, May 28-31, 2013, pp. 91-92.
6. V.S. Guliyev, K. Rahimova, Parabolic fractional integral operator in modified parabolic Morrey spaces. // Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute, 163 (2013), 85-106.
7. V.S. Guliyev, K.R. Rahimova, M.N. Omarova, Commutators of Intrinsic Square Functions on Vector-valued Generalized Morrey Spaces. // Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. 34 (2014), no. 1, Mathematics and Mechanics, 35-50.
8. K. Rahimova, Commutator of parabolic maximal operator on generalized Morrey spaces. // Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics 2 (2) (2014), 81-92.
9. V.S. Guliyev, K. Rahimova, Parabolic fractional integral operator and its commutator on generalized Morrey spaces. // Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics 2 (2) (2014), 22-41.

KAMALƏ RAZİM qızı RƏHİMOVA

**Bir sinif anizotrop subxətli operatorların
Morri tipli fəzalarda məhdudluğu**

XÜLASƏ

Dissertasiya işi anizotrop maksimal operatorun, anizotrop kəsir-maksimal operatorun, anizotrop Riss potensialının və onların komutator operatorlarının anizotrop modifə olunmuş Morri və anizotrop ümumiləşmiş Morri fəzalarında məhdudluğuna həsr olunub.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakılardır:

1. Anizotrop kəsir-maksimal operatorun anizotrop modifə olunmuş Morri fəzalarda məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər alınmışdır.
2. Anizotrop kəsir-maksimal operatorun və onun komutatorunun anizotrop ümumiləşmiş Morri fəzalarda məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər alınmışdır.
3. Anizotrop Riss potensialının anizotrop modifə olunmuş Morri fəzalarda məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər alınmışdır.
4. Anizotrop Riss potensialının və onun komutatorunun anizotrop ümumiləşmiş Morri fəzalarda məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər alınmışdır.

KAMALA RAZIM kizi RAHIMOVA

Investigations of the boundedness of some class anisotropic operators in the Morrey type spaces

SUMMARY

The dissertation dedicated to the study of problems boundedness anisotropic maximal, anisotropic fractional maximal operators, anisotropic Riesz potential and its commutators on anisotropic modified Morrey and anisotropic generalized Morrey spaces. The principal results of dissertation are as follows:

1. Necessary and sufficient conditions of boundedness of anisotropic fractional maximal operator on anisotropic modified Morrey spaces were obtained.

2. Necessary and sufficient conditions of boundedness of anisotropic fractional maximal operator and its commutators on anisotropic generalized Morrey spaces were obtained.

3. Necessary and sufficient conditions of boundedness of anisotropic Riesz potential on anisotropic modified Morrey spaces were obtained.

4. Necessary and sufficient conditions of boundedness of anisotropic Riesz potential and its commutators on anisotropic generalized Morrey spaces were obtained.