

**НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

На правах рукописи

АЙНУР РАМАЗАН КЫЗЫ ГАСЫМОВА

**АНАЛИЗ СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВОЗМУЩЕННОГО
ОПЕРАТОРА ШТАРКА С РАСТУЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ**

1202.01 - Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

Баку – 2016

Работа выполнена в отделе «Теория функций» **Института Математики и Механики НАН Азербайджана.**

Научные руководители:

доктор физико-математических наук, проф.

Джамал И.Мамедханов

кандидат физико-математических наук, доц.

Бахрамкур А.Мустафеев

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, проф.

Идаят М.Гусейнов

(Бакинский Государственный Университет)

доктор физико-математических наук, проф.

Ибрагим М.Набиев

(Института Математики и Механики НАН Азербайджана)

Ведущая организация:

Азербайджанский Университет Архитектуры и Строительства кафедра «Высшая математика».

Защита диссертации состоится 23 сентября 2016 г. в 16⁰⁰ часов на заседании Диссертационного Совета Д 01.111 по присуждению доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г.Баку, ул.Вагабзаде, 9

Автореферат разослан 05 июля 2016 года.

**Ученый секретарь
Диссертационного Совета
Д 01.111 ИММ НАНА**

д.м.н.Ровшан Бандалиев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В развитии многих важных направлений математики и физики большую роль сыграли понятия и методы, зародившиеся в процессе изучения таких простых объектов, как уравнение Штурма – Лиувилля $L \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ (в последнее время его называют также одномерным оператором Шредингера). Подтверждением этому могут служить обнаруженные Г. Гарднером, Дж. Грином, М. Крускалом и Р. Миура неожиданные связи спектральной теории операторов Штурма-Лиувилля с некоторыми нелинейными эволюционными уравнениями в частных производных: $U_t = 6UU' - U'''$ (уравнение Кортевега-де-Фриза, КдФ).

В 40-х годах арсенал методов изучения уравнения Штурма – Лиувилля пополнился новым аппаратом – операторами преобразования. Б. Я. Левин ввёл новый вид операторов преобразования, сохраняющих асимптотику решений на бесконечности, а В.А. Марченко использовал их для решений обратной задачи теории рассеяния.

Отметим, что под обратными задачами спектрального анализа понимают задачи восстановления линейного оператора по тем или иным его спектральным характеристикам. Такими характеристиками могут быть спектры (при различных граничных условиях), спектральная функция, данные рассеяния и др. Первым из математиков, кто обратил внимание в этом направлении, был шведский математик Борг. Он же выполнил первое подробное систематическое исследование одной из важных обратных задач, а именно, обратной задачи для классического оператора Штурма Лиувилля вида

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \lambda y \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ y'(0) &= y'(\pi) = 0, \end{aligned}$$

где $q(x)$ -действительная непрерывная функция по спектрам. Борг показал, что в общем случае один спектр оператора Штурма Лиувилля его не определяет. В той же работе Борг показал, что два спектра оператора Штурма Лиувилля (при различных граничных условиях) однозначно его определяют.

Дальнейшие существенные успехи в теории обратных задач были достигнуты советскими математиками Л.А.Чудовым, В.А.Марченко, М.Г.Крейном, Ю.М.Березанским, И.М.Гельфандом, Б.М.Левитаном, Л.Д.Фадеевым, М.Г.Гасымовым и их учениками.

В последующем интерес к обратным задачам значительно возрос из-за связей обратных задач с некоторыми важными нелинейными уравнениями

математической физики. Подробное изложение связей обратных задач с нелинейными уравнениями (не только Кортефеге – де Фриза) посвящена прекрасная монография В.Е.Захарова, С.В.Манакова.

Как было отмечено выше, обратная задача теории рассеяния состоит в восстановлении потенциала по известному асимптотическому поведению на бесконечности нормированных собственных функций граничной задачи, порождаемой данным дифференциальным уравнением и граничным условием.

Исчерпывающее решение этой задачи в случае, когда потенциал удовлетворяет условию

$$\int_0^{\infty} x|p(x)|dx < \infty, \quad (*)$$

получено В.А.Марченко. Эти результаты были, затем обобщены на систему уравнений с коэффициентами, удовлетворяющими условию (*) в книге Э.С. Аграновича, В.А. Марченко. Имеется несколько обзорных и монографических статей по данным вопросам (о которых мы говорили выше). В разных постановках разрывные обратные задачи были рассмотрены в статьях М.Г.Гасимова, Р.Х.Амирова, Р.Х.Амирова и В.А.Юрко, Э.Н.Ахмедова и И.М.Гусейнова, И.М.Гусейнова и Р.Т.Пашаева, И.М.Гусейнова и А.Р.Лятифовой, О.Х.Хальда, В.В.Проворотова, Р.Й.Крюгера, М.Кобаяши, Хуан Фу-Янга, С.Т.Ших и В.А.Юрко и др. В основном разрывные обратные задачи были рассмотрены на конечном отрезке.

В настоящей диссертации исследовано решение обратной задачи для возмущенного уравнения Штарка с растущим потенциалом на бесконечном интервале $[0, \infty)$. Получена формула для вычисления производной от спектральной функции оператора Штарка, доказано существование оператора преобразования с условием на бесконечности, получена оценка частных производных ядра оператора преобразования, построена функция Римана гиперболического уравнения, которому удовлетворяет ядро оператора преобразования, определены асимптотики нормированных собственных функций, изучено поведение функции рассеяния, получено основное уравнение типа Марченко для рассматриваемой задачи.

Цель работы.

1. Получить формулы для вычисления производной от спектральной функции оператора Штарка.
2. Построить оператор преобразования с условием на бесконечности.
3. Исследовать ядро оператора преобразования и ее производных.

4. Построить функцию Римана для гиперболического уравнения, которому удовлетворяет ядро оператора преобразования.
5. Найти асимптотики нормированных собственных функций рассматриваемой задачи.
6. Исследовать поведение функции рассеяния рассматриваемой задачи.
7. Вывести основное уравнение типа Марченко.

Общая методика исследования. В работе используется метод, разработанный В.С.Аграновичем, В.А.Марченко, Б.Я.Левиным, Б.М.Левитаном, М.Г.Гасымовым для решения обратной задачи теории рассеяния для возмущенного оператора Штарка. При этом удастся применить метод Римана для неограниченной области, где конструктивно строится функция Римана гиперболического уравнения, которому удовлетворяет ядро оператора преобразования.

Научная новизна работы. В работе получены следующие результаты:

- получена формула для вычисления производной от спектральной функции оператора Штарка;
- доказывается существование оператора преобразования с условием на бесконечности, переводящего решение невозмущенного уравнения Штарка в решение возмущенного уравнения;
- дается оценка для ядра оператора преобразования и ее производных;
- конструктивно строится функция Римана гиперболического уравнения, которому удовлетворяет ядро оператора преобразования;
- определяются асимптотики нормированных собственных функций рассматриваемой задачи;
- изучается поведение функции рассеяния (S -функция), рассматриваемой задачи.
- выводится основное уравнение типа Марченко. Исследуются свойства функции перехода основного уравнения, решается обратная задача, т.е. по S -функции восстанавливается потенциал (коэффициент) рассматриваемого дифференциального уравнения.

Теоретическая и практическая ценность. В рассматриваемых ранее работах потенциалы (коэффициенты) либо стремились к нулю, либо к постоянному числу на бесконечности. В данной работе потенциал (коэффициент) стремится к бесконечности, что затрудняет решение задачи. Однако с помощью построения функции Римана удалось преодолеть эту трудность, в чем заключается новизна этой работы.

Результаты диссертации могут, быть применены для нахождения аналитических решений нелинейных эволюционных уравнений (уравнение Кордевега-де Фриза) метод обратной задачи.

Апробация работы. Результаты докладывались на международной конференции «Математические теории, проблемы их применения и обучения», Гянджа, 2011; на международной конференции «Области применения математики и ИКТ», Гянджа, 2014; на семинаре отдела Функциональный анализ ИММ НАН Азербайджана, Баку, 2015 (руководитель д.ф.-м.н., проф. Г.И.Асланов); на III международной конференции юных исследователей, Баку, 2015; на семинаре кафедры Математический анализ Гянджинского Государственного Университета (руководитель к.ф.-м.н., доц. О.М.Гусейнов); на семинаре кафедры Высшая математика Азербайджанского Технологического Университета (руководитель д.ф.-м.н., проф. Ш.М.Муталлимов).

Публикация. Основные результаты диссертации опубликованы в 19 работах автора, 3 из которых опубликованы за границей. Список работ приводятся в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 96 наименований. Объем диссертационной работы 118 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ.

Диссертационная работа посвящена решению обратной задачи для возмущенного уравнения Штарка в бесконечном интервале $[0, \infty)$

$$-y'' - [x - p(x)]y = \lambda y, \quad (1)$$

$$y(0) = 0 \quad (2)$$

В первой главе рассматривается случай, когда $p(x) \equiv 0$ при $x \geq a > 0$.

Пусть $\varphi_0(x, \lambda), \theta_0(x, \lambda)$ являются решениями уравнения (1) со следующими начальными условиями

$$\varphi_0(0, \lambda) = 0, \quad \varphi'_0(0, \lambda) = 1 \quad (3)$$

$$\theta_0(0, \lambda) = 1, \quad \theta'_0(0, \lambda) = 0 \quad (4)$$

Известно, что для любого λ с $\text{Im} \lambda \neq 0$ уравнение (1) имеет единственное решение

$$\psi_0(x, \lambda) = \theta_0(x, \lambda) + m_0(\lambda)\varphi_0(x, \lambda) \in L_2(0, \infty)$$

В первом параграфе первой главы исследуются некоторые решения уравнения

$$-y'' - xy = \lambda y \quad (5)$$

Доказывается, что функции

$$\begin{aligned} \theta_1(x, \lambda) &= \sqrt{x + \lambda} J_{\frac{1}{3}} \left\{ \frac{2}{3} (x + \lambda)^{\frac{3}{2}} \right\} \\ \theta_2(x, \lambda) &= \sqrt{x + \lambda} Y_{\frac{1}{3}} \left\{ \frac{2}{3} (x + \lambda)^{\frac{3}{2}} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

являются линейно-независимыми решениями уравнения (5), где $J_{\frac{1}{3}}(x), Y_{\frac{1}{3}}(x)$ функция Бесселя первого и второго рода соответственно и

$H_{\frac{1}{3}}^{(1)}(x) = J_{\frac{1}{3}}(x) + iY_{\frac{1}{3}}(x)$ - функция Ганкеля.

Имеет место

Лемма 1.1.1. При любом λ из верхней полуплоскости функция $\Psi_0(x, \lambda)$ принадлежит пространству $L_2[0, \infty)$.

Во втором параграфе первой главы доказывается справедливость равенства Парсеваля, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x, \lambda) \varphi_0(t, \lambda) K(\lambda) d\lambda = \delta(x - t) \quad (7)$$

где $\varphi_0(x, \lambda)$ при начальных условиях $\varphi_0(0, \lambda) = 0, \varphi_0'(0, \lambda) = 1$ и

$$K_0(\lambda) = \frac{3}{\pi \lambda \left[H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \left(\frac{2}{3} \lambda^{\frac{3}{2}} \right) \right]^2} \quad (\lambda > 0) \quad (8)$$

$K_0(\lambda)$ является производной от спектральной функции оператора, порожденного граничной задачей (1)-(2). Далее изучаются решения Йоста уравнения (1) при комплексных значениях параметра λ .

В третьем параграфе первой главы определяется S - функция граничной задачи (1)-(2) и изучаются некоторые ее свойства.

Во второй главе рассматривается случай, когда $p(x)$ - вещественная, непрерывно-дифференцируемая функция. Устанавливаются условия существования оператора преобразования, выводится основное интегральное уравнение обратной задачи, и исследуются его свойства.

В первом параграфе второй главы приводятся условия существования оператора преобразования типа Б.Я.Левина. Эти условия приводятся в следующей теореме.

Теорема 2.1.1. Пусть выполняются условия:

а) функция $p(x)$ непрерывно-дифференцируемая на полуоси $0 \leq x < \infty$;

б) существует интеграл вида

$$\rho_4(x) = \int_x^{\infty} \alpha^4 e^{\sqrt{2}\alpha^{\frac{3}{2}}} |p(\alpha)| d\alpha \quad (9)$$

Тогда при любом λ с $\text{Im}\lambda > 0$ уравнение (1) имеет аналитическое в верхней полуплоскости и непрерывное вплоть до вещественной оси решение $\psi(x, \lambda)$ с условием

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x, \lambda) \psi_0^{-1}(x, \lambda) = 1, \quad (10)$$

и существует ядро $K(x, t)$ такое, что

$$\psi(x, \lambda) = \psi_0(x, \lambda) + \int_x^{\infty} K(x, t) \psi_0(t, \lambda) dt \quad (11)$$

($\psi_0(x, \lambda) = \sqrt{x + \lambda} H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \left\{ \frac{2}{3} (x + \lambda)^{\frac{3}{2}} \right\}$ - решение уравнения (5)), причем ядро $K(x, t)$ в

(11) и его производные удовлетворяет уравнению

$$1) K_{xx}'' - K_{tt}'' + (x - t)K = K(x, t)p(x), \quad (12)$$

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^{\infty} p(\alpha) d\alpha,$$

$$(13) K(x, t) = 0, x > t, \quad \lim_{x+t \rightarrow +\infty} K(x, t) = \lim_{x+t \rightarrow +\infty} \frac{dK}{dt} = 0, \quad (14)$$

$$2) |K(x, t)| \leq \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{x+t}{2} \right) e^{\rho_1 \left(\frac{x+t}{2} \right)}, \quad (15)$$

$$3) \left| \frac{\partial K(x_1, x_2)}{\partial x_i} + \frac{1}{4} \rho \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \right| \leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \left[C + \frac{\sigma(x)}{(x_1 + x_2)^2} \right] \quad (16)$$

где

$$\rho_j(x) = \int_x^{+\infty} \alpha^j e^{\sqrt{2}\alpha^{\frac{3}{2}}} p(\alpha) d\alpha, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (17)$$

$$\sigma(x) = \int_x^{\infty} |p(\alpha)| d\alpha \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (18)$$

Во втором параграфе второй главы задача (12)-(14) с помощью замены переменных $\xi = \frac{t+x}{2}$, $\eta = \frac{t-x}{2}$ сводиться к интегральному уравнению

$$U(\xi_0, \eta_0) = \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\infty} R(\xi, 0; \xi_0, \eta_0) p(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\infty} d\xi \int_0^{\eta_0} u(\xi, \eta) P(\xi + \eta) R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) d\eta \quad (19)$$

Здесь $U(\xi, \eta) = U\left(\frac{t+x}{2}, \frac{t-x}{2}\right) = K(x, t) = K(\xi - \eta, \xi + \eta)$.

Функция $U(\xi, \eta)$ является решением следующей задачи

$$L(U) \equiv \frac{\partial^2 U(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} + 2\eta U(\xi, \eta) = U(\xi, \eta) p(\xi, \eta) \quad (20)$$

$$U(\xi, 0) = \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\infty} p(x) dx \quad (21)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} u(\xi, \eta) = 0 \quad (22)$$

$R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ является функцией Римана уравнения $L[U] = f(\xi, \eta)$ где $f(\xi, \eta) = \frac{1}{2} U(\xi, \eta) p(\xi, \eta)$.

В третьем параграфе второй главы исследуется функция Римана $R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ которая является решением задачи

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \xi \partial \eta} + \eta R = 0 \quad \begin{cases} 0 < \eta < \eta_0 \\ \xi_0 < \xi < \infty \\ 0 < \eta < \xi \end{cases} \quad (23)$$

$$R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)|_{\xi=\xi_0} = 1 \quad 0 \leq \eta \leq \eta_0 \quad (24)$$

$$R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)|_{\eta=\eta_0} = 1 \quad \xi_0 \leq \xi \leq \infty \quad (25)$$

Решением задачи (23)-(25) выражается формулой

$$R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = J_0 \sqrt{2(\xi - \xi_0)(\eta^2 - \eta_0^2)}.$$

В четвертом параграфе второй главы, применяя метод последовательных приближений для решения интегрального уравнения (19) получим

$$|U(\xi_0, \eta_0)| \leq \frac{1}{2} \rho(\xi_0) e^{\frac{\rho_1(\xi_0)}{2}} \quad (26)$$

В пятом и шестом параграфах второй главы доказываются некоторые важные оценки для функций $K'_x(x, t), K'_t(x, t)$.

$$\left| K'_x(x,t) + \frac{1}{4}P\left(\frac{x+t}{2}\right) \right| \leq C(x+t)p_2\left(\frac{x+t}{2}\right) \left[2 + \frac{\sigma(x)}{(x+t)^3} \right] \quad (27)$$

$$\left| K'_t(x,t) + \frac{1}{4}P\left(\frac{x+t}{2}\right) \right| \leq C(x+t)p_2\left(\frac{x+t}{2}\right) \cdot \left[2 + \frac{\sigma(x)}{(x+t)^3} \right], \quad C \equiv const$$

В седьмом параграфе второй главы построена s - функция граничной задачи (1)-(2) и исследованы некоторые ее свойства. Получена следующая лемма.

Лемма 2.7.1. s -функция граничной задачи (1)-(2) определена на всей вещественной оси и $\bar{S}(\lambda) = S^{-1}(\lambda)$.

Доказано, что $S(\lambda) = \frac{\bar{\eta}_1(\lambda)}{\eta_1(\lambda)}$, $\eta_1(\lambda) = 1 + \int_x^\infty K(0,t)F_0(t,\lambda)dt$

$F_0(t,\lambda) = \frac{\psi_0(t,\lambda)}{\psi_0(0,\lambda)}$. В восьмом параграфе второй главы исследуются

нормированные собственные функции задачи (1)-(2) и доказано равенство Парсеваля.

В девятом параграфе второй главы выводиться основное интегральное уравнение типа Марченко:

$$K(x,t) + F(x,t) + \int_0^\infty K(x,\xi)F(x,\xi,t)d\xi = 0 \quad (28)$$

где

$$F(x,t) = \int_{-\infty}^\infty \left[\frac{\varphi_0(x,\lambda) \cdot \varphi_0(t,\lambda)[1-S(\lambda)]}{\bar{\psi}_0(0,\lambda)} \cdot \frac{\bar{\psi}_0(0,\lambda)}{W_0(\lambda)} + \right. \\ \left. + \frac{\bar{\varphi}_0(x,\lambda) \cdot \bar{\varphi}_0(t,\lambda)[1-\bar{S}(\lambda)]}{\psi_0(0,\lambda)} \cdot \frac{\psi_0(0,\lambda)}{W_0(\lambda)} \right] d\lambda,$$

$$W_0(\lambda) = \psi_0(0,\lambda) \cdot \bar{\varphi}'_0(0,\lambda) - \varphi'_0(0,\lambda) \cdot \bar{\psi}_0(0,\lambda).$$

В десятом параграфе второй главы оценивается ядро основного интегрального уравнения (28) и доказывается следующая теорема.

Теорема 2.10.1. Для функции $F(x,t)$ верна следующая оценка

$$|F(x,t)| < Cp\left(\frac{x+t}{2}\right) \quad (29)$$

В одиннадцатом параграфе второй главы исследуется разрешимость основного уравнения. Доказана следующая теорема.

Теорема 2.11.1. При каждом фиксированном $x = x_0$ основное уравнение (28) имеет единственное решение из пространства $L_2[x_0, \infty)$.

В двенадцатом и тринадцатом параграфах главы два доказывается существование частных производных функции перехода $F(x,t)$. Имеет место теорема.

Теорема 2.12.1. Функция $F(x,t)$ имеет непрерывные частные производные, $F'_x(x,t)$, $F'_t(x,t)$ и имеют место оценки

$$\begin{aligned} |F'_x(x,t)| &\leq C\alpha\left(\frac{x+t}{2}\right) \\ |F'_t(x,t)| &\leq C\alpha\left(\frac{x+t}{2}\right) \end{aligned} \quad (30)$$

где $\alpha(t) \in L_1(0, \infty)$, $C = \text{const}$.

В третьей главе решается обратная задача теории рассеяния для граничной задачи (1),(2).

Обратные задачи теории рассеяния формируются следующим образом: можно ли, зная асимптотическое поведение на бесконечности нормированных собственных функций граничной задачи (1),(2), т.е. S -функцию, восстановить уравнение (1) (т.е. функцию $p(x)$). Если это возможно, то какими свойствами должна обладать данная функция $S(\lambda)$, чтобы она была бы S -функцией граничной задачи типа (1),(2).

Известно, что при решении задач спектрального анализа важная роль принадлежит уравнениям для ядра операторов преобразований, которые строятся с помощью спектральных данных.

В данной диссертации построено и изучено основное уравнение для ядра $K(x,t)$ через S -функцию. Доказана следующая основная теорема.

Основная теорема. S -функция граничной задачи (1)-(2) обладает следующими свойствами:

1⁰ а) S -функция определена на всей вещественной $-\infty < \lambda < \infty$,

б) $\bar{S}(\lambda) = S^{-1}(\lambda)$,

в) функция $|\psi_0(0, \lambda)|^2 [S(\lambda) - 1] \in L_1[-\infty; \infty; k_0(\lambda)]$;

2⁰. Однородное уравнение $\varphi(t) + \int_{x_0}^{\infty} F(\xi, t) \varphi(\xi) d\xi = 0$ имеет лишь тривиальное

решение $\varphi(t) \in L_2[x_0, \infty]$;

3⁰. Функция $F(x, t)$, определенная по формуле

$$F(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\psi_0(x, \lambda) \psi_0(t, \lambda) [1 - S(\lambda)]}{\varphi_0(0, \lambda)} \cdot \frac{\overline{\psi_0(0, \lambda)}}{\overline{W_0(\lambda)}} + \right. \\ \left. + \frac{\overline{\psi_0(x, \lambda)} \overline{\psi_0(t, \lambda)} [1 - \overline{S(\lambda)}]}{\overline{\psi_0(0, \lambda)}} \cdot \frac{\psi_0(0, \lambda)}{W_0(\lambda)} \right] d\lambda \quad (31)$$

имеет непрерывные производные $F'_x(x, t)$ и $F'_t(x, t)$, удовлетворяющие условию

$$|F'_x| + |F'_t| \leq C \alpha \left(\frac{x+t}{2} \right), \quad C - const \quad (32) \quad (1.1')$$

где $\alpha(x)$ - убывающая и интегрируемая функция на $[0, \infty)$.

4⁰. Интегральное уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} V(\lambda) U(x, \lambda) K_0(\lambda) d\lambda = 0$$

имеет лишь тривиальное решение в $L_2[-\infty; \infty; k_0(\lambda)]$.

Доказано, что условия 1⁰-4⁰ также достаточны для того, чтобы функция $S(\lambda)$ была бы S - функцией граничной задачи (1),(2) с потенциалом, удовлетворяющим условию

$$\int_x^{\infty} |p(\alpha)| d\alpha < \infty \quad (33) \quad (1.2)$$

В параграфах 2, 3 третьей главы с помощью спектральных данных определяется функция $F(x, t)$ и составляется основное уравнение для ядра $K(x, t)$. В силу условия 2⁰ основное уравнение имеет единственное решение из пространства $L_2[0, \infty)$.

Доказывается, что функция

$$\psi(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \int_x^{\infty} K(x, t) \psi_0(t, \lambda) dt$$

является решением уравнения

$$-y'' - [x - p(x)]y = \lambda y$$

с потенциалом $p(x) = -2 \frac{dK(x,x)}{dx}$, который удовлетворяет условию

$$\int_0^{\infty} |p(\alpha)| d\alpha < \infty.$$

В параграфе 4 третьей главы доказывается справедливость равенства Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(x, \lambda) \overline{U(t, \lambda)} K_0(\lambda) d\lambda = \delta(k - t) \quad (34)$$

Как известно Кортевега - де Фриза играет особую роль в теории нелинейных волн. Оно замечательно тем, что при его изучении был открыт новый метод новый метод математической физики – метод обратной задачи рассеяния. Постепенно этот метод стал эффективным математическим орудием, позволяющим точно решать ряд трудных и физических интересных нелинейных задач, не допускающих ранее аналитического подхода. Область применения метода обратной задачи рассеяния постоянно расширяется.

Суть этого метода заключается в том, что на первом этапе необходимо по заданному потенциалу $U(x, 0)$ найти данные рассеяния, т.е. решить прямую задачу рассеяния. На последнем этапе нужно по данным рассеяния восстановить потенциал $U(x, t)$ являющийся решением данного уравнения.

Метод обратной задачи применим для тех уравнений, для которых существует пара операторов L и A такая, что операторное соотношение

$$\frac{\partial U}{\partial t} = i[L, A]$$

тождественно исследуемому уравнению. Здесь L коммутатор пары операторов L и A (пара Лакса).

В параграфе 6 третьей главы следуя вышеприведенной схеме, рассматривается уравнение

$$U_t - U_{xxx} + 6UU_x + \frac{U}{2t} = 0, \quad (35)$$

которое называется осесимметрическим уравнением Кордефега-де Фриза. Для уравнения (35) парой Лакса являются операторы

$$L(t) = t \left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + U - \frac{x}{12t} \right\},$$

$$A(t) = 4 \frac{d^3}{dx^3} - 3 \left(U \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} U \right)$$

В этом случае уравнение $L_t = [A, L]$ будет эквивалентно уравнению (35).

При условии

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|) |U(x, 0)| dx < \infty$$

доказано существование оператора преобразования переводящего решение «невозмущенного» уравнения

$$-\psi'' + x\psi = \lambda\psi \quad (36)$$

в решение уравнения

$$L\psi \equiv -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + [x + U(t, x)]\psi = \lambda\psi \quad (37)$$

по формуле

$$L\psi \equiv \psi_0(x, \lambda) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, t) \psi_0(t, \lambda) dt \quad (0 \leq x < +\infty)$$

где

$$\psi_0(x, \lambda) = \sqrt{x + \lambda} H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \left\{ \frac{2}{3} (x + \lambda)^{\frac{3}{2}} \right\}$$

$$|K(x, t)| \leq \frac{1}{2} \sigma_0 \left(\frac{x+t}{2} \right) e^{\sigma_1 \left(\frac{x+t}{2} \right)}$$

$$\sigma_j(x) = \int_x^{+\infty} (1 + \alpha^j) |u(\alpha)| d\alpha, \quad (j = 0, 1).$$

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям доктору физико-математических наук профессору Мамедханову Дж.И. и кандидату физико-математических наук доценту Мустафаеву Б.А. за постановку задачи, руководство работой и ценные советы.

**Основные результаты диссертационной работы опубликованы в
следующих работах автора:**

1. Мустафайев Б.А., Ахмедова А.Р. On the inverse problem of scattering theory for the perturbed Starks equation on a semiaxis. Gəncə Dövlət Universiteti, Riyazi nəzəriyyələr, onların tətbiqi və tədrisi sahəsində olan problemlər, Konfrans materialları, Gəncə, 2008, səh.184-188.
2. Мустафаев Б.А., Ахмедова А.Р. Метод обратной задачи рассеяния и осесимметрическое уравнение Кортевега-де-Фриза. «Научные вести», Азербайджанский Технологический Университет, 2008, №7-8, стр. 35-39.
3. Мустафаев Б.А., Мамедханов Дж. И., Ахмедова А.Р. Обратная задача теории рассеяния для одного класса потенциалов уравнения Штурма-Лиувилля. «Вестник международной академии Системных Исследований», том 11, Москва, 2008, стр.51-54.
4. Ахмедова А.Р. Оператор преобразования для некоторого класса возмущенных уравнений Штурма-Лиувилля. Azərbaycan Texniki Universiteti, «Elmi əsərlər» fundamental elmlər, №2, cild VII (26) , Bakı, 2008, səh.82-85.
5. Ахмедова А.Р. К спектральной теории финитно-возмущенного оператора Штарка на полуоси. Azərbaycan Texniki Universiteti, «Elmi Əsərlər» fundamental elmlər, №3, cild VII (27) , Bakı, 2008, səh.83-85.
6. Ахмедова А.Р. Исследование решения финитно-возмущенного уравнения Штарка на полуоси. «Научные вести», Азербайджанский Технологический Университет, 2008, №7-8, стр.20-24.
7. Ахмедова А.Р. Оператор преобразования для возмущенного уравнения Штарка на полуоси. «Известия», Гянджинский Региональный Научный Центр Национальной Академии Наук Азербайджана. 2008, стр. 138-142.
8. Б.А.Мустафаев, Ахмедова А.Р., Гусейнзаде С.С. Некоторые методы нахождения функции Римана для компактных уравнений. Gəncə Dövlət

- Universiteti, Riyazi nəzəriyyələr, onların tətbiqi və tədrisi sahəsində olan problemlər, Konfrans materialları, Gəncə, 2008, səh.151-155.
9. Мустафаев Б.А., Мамедханов Дж. И., Ахмедова А.Р. Обратная задача теории рассеяния для возмущенного оператора Штарка на полуоси. АМЕА-нын, «Məruzələri», cild LXV, № 1, Bakı, 2009, səh.3-11.
 10. Мустафаев Б.А., Ахмедова А.Р., Ибадов Н.В., Набиев Б.М.. Решение обратной задачи теории рассеяния для возмущенного ангармонического уравнения на всей оси. Gəncə Dövlət Universiteti. Elmi xəbərlər, № 1, Gəncə, 2009, səh.14-24.
 11. Ахмедова А.Р., Мустафаев Б.А., Мамедов Р.М. On the inverse problem of scattering theory for the perturbed Starks equation on a semiaxis. Gəncə Dövlət Universiteti. Elmi xəbərlər, № 1, Gəncə, 2009, Səh.41-45.
 12. Ахмедова А.Р. Обратная задача теории рассеяния для возмущенного оператора Штарка на полуоси. «Математика, информатика, физика и их преподавание», МПГУ, Москва 2010, стр.40-41.
 13. Ахмедова А.Р. Прямая задача теории рассеяния для возмущенного уравнения Штарка на полуоси. «Спектральная теория и ее приложения», Тезисы международной конференции, посвященной 80-ти летнему юбилею академика Ф.Г.Максудова, Баку, 2010, стр.70-72.
 14. Ахмедова А.Р. Возмущенного оператор Штарка и его S – функция. Bakı universitetinin xəbərləri. №1, 2010, səh.45-49.
 15. Ahmedova A.R. Spectral characteristics of Starks finite-perturbed operator. АМЕА, Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun əsərləri. Cild XXXII(XL), Bakı, 2010, səh.9-20.
 16. Ahmedova A.R. Construction of transformation operator with conditionat infinity for Starks equation. Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının Əsərləri, Cild XXX, №1, Bakı, 2010, səh.5-12.

- 17.Ахмедова А.Р., Набиев Б.М. Решения линейно-возмущенного уравнения Штарка. Материалы международной конференции «Области применения математики и ИКТ» I hissə, Gəncə, 2014, səh.142-145.
- 18.Ahmedova A.R. On the inverse problem of Scattering Theory for the Perturbed Starks equation on a Semiaxis. «Georgian Mathematical Journal», vol 3, 22 (2015), pp. 295-304.
- 19.Ахмедова А.Р., Мустафаев Б.А., Мамедова А.. Схема построения операторов преобразования для широкого класса потенциалов уравнения Штурма-Лиувилля. Gənc Tədqiqatçıların III Beynəlxalq elmi konfransı, I kitab, materiallar, 2015-ci il, səh.149-150.

Aynur Ramazan qızı Qasımova

**ARTAN POTENSIALLI HƏYACANLANMIŞ ŞTARK OPERATORUNUN
SPEKTRAL XARAKTERISTİKALARININ ANALIZI**

XÜLASƏ

Dissertasiya işində $[0, \infty)$ intervalında artan potensiallı Ştark tənliyi üçün səpilmənin tərs məsələsinin həlli araşdırılmışdır. Məsələnin səpilmə funksiyası təyin edilmiş, spektral funksiyanın törəməsini təyin etmək üçün düstur alınmışdır. Çevirmə operatorunun varlığı isbat edilmiş, çevirmənin və onun xüsusi törəmələrinin qiymətləndirilmələri alınmışdır. Çevirmə operatorunun nüvəsinin ödədiyi hiperbolik tip tənliyin Riman funksiyası qurulmuşdur. Baxılan məsələnin normallaşmış məxsusi funksiyalarının asimptotikası təyin edilmişdir. S - funksiyanın asimptotik ifadəsi alınmış, baxılan məsələ üçün Marçenko tipli əsas tənlik alınmış və onun həlli araşdırılmışdır.

Dissertasiyada aşağıdakı yeni nəticələr alınmışdır:

- Ştark operatorunun spektral funksiyası təyin edilmiş, onun törəməsinin tapılması üçün düstur çıxarılmışdır.
- Həyacanlanmamış Ştark tənliyinin həllini həyacanlanmış tənliyin həllinə çevirən çevirmə operatorunun varlığı isbat edilmişdir.
- Çevirmə operatorunun nüvəsinin və onun törəmələrinin qiymətləndirilmələri alınmışdır.
- Çevirmə operatorunun nüvəsinin ödədiyi tənliyin Riman funksiyası qurulmuşdur.
- Baxılan məsələnin normallaşmış məxsusi funksiyalarının asimptotikası təyin edilmişdir.
- Məsələnin S - funksiyanının xassələri araşdırılmışdır.
- Məsələ üçün Marçenko tipli əsas tənlik alınmışdır.

Aynur Ramazan Gasimova

**THE ANALYSIS OF SPECTRAL CHARACTERISTICS OF INCREASING
POTENTIAL OF STIMULATED STARK OPERATOR**

SUMMARY

In this thesis the solution of inverse problem of scattering for increasing potential of Stark equation in $[0, \infty)$ interval has been investigated. Scattering function for the problem was defined the formula for setting of derivatives of the spectral function was achieved. The existence of transformation operator was proved, estimation of transformation and its partial derivatives were achieved. Riemann function of hyperbolic type equation satisfied by the nucleus of transformation operator was constructed. Asymptotic of normalized, Eigen functions of the viewed problem was determined. Asymptotic expression of S -function was gotten, main equation of Marchenko type was achieved for the viewed problem and its solution was investigated.

The following new conclusions were achieved in the dissertation work:

- Spectral function of Shtark operator was defined, the formula for finding its derivative has been made up;
- The existence of conversion operator transformation the solutions of non-stimulated Stark equation to the solution of stimulated equation was proved;
- Valuations of the nucleus of conversion operator and its derivatives were achieved;
- Riemann function of the equation satisfied by the nuclear of transformation operator was constructed;
- asymptotic of normalized, Eigen functions of viewed problem were determined;
- The properties of the problem's S -functions were investigated;
- Main equation of Marchenko type was achieved for the viewed problem.

**AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU**

Əlyazması hüququnda

AYNUR RAMAZAN QIZI QASIMOVA

**ARTAN POTENSIALLI HƏYACANLANMIŞ ŞTARK OPERATORUNUN
SPEKTRAL XARAKTERISTİKALARININ ANALIZI**

1202.01 – Analiz və funksional analiz

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı – 2016