

**НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

На правах рукописи

НАЗИМ АСАДУЛЛА ОГЛЫ НЕЙМАТОВ

**ВЕСОВЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И
НЕКОТОРЫЕ ВЕСОВЫЕ ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ**

1202.01 - Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

Баку – 2015

**Работа выполнена в отделе «Математический анализ»
Института Математики и Механики НАН Азербайджана.**

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, профессор Аллахверан Д. Джабраилов

Официальные оппоненты:
доктор математических наук Зиятхан С. Алиев
(Бакинский Государственный Университет);
кан. физ.-мат. наук, доцент Джаваншир Д. Гасанов
(Институт Математики и Механики НАН Азербайджана).

Ведущая организация:
Азербайджанский Государственный Педагогический
Университет, кафедра «Математический анализ»

Защита диссертации состоится 27 ноября 2015 г. в 16⁰⁰
часов на заседании Диссертационного Совета Д 01.111 по
присуждению ученой степени доктора наук и доктора
философии при Институте Математики и Механики
Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке
Института Математики и Механики Национальной Академии
Наук Азербайджана.

Адрес: АЗ 1141, г.Баку, ул.Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 24 октября 2015 года.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета
Д 01.111 ИММ НАНА к.ф.-м.н., доц. Ровшан Бандалиев



ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Первое интегральное представление функций многих переменных, определенных в областях (звездных, относительно точкам некоторого шара) $G \subset E_n$ принадлежит академику С.Л.Соболеву. С.Л.Соболевым разработан метод интегральных представлений функций из построенных им же известных функциональных пространств $W_p^r(G)$ и доказаны основные теоремы вложения этих пространств, с дальнейшими приложениями в теорию дифференциальных уравнений в частных производных.

Дальнейшее развитие метода интегральных представлений теории пространств, дифференцируемых функций многих переменных, связано с именем В.П.Ильина.

В.П.Ильин доказал принципиально новое интегральное представление функций многих переменных в любой точке $x \in E_n$.

С помощью полученного им нового интегрального представления функции в точке пространства E_n , В.П.Ильин построил теорию известных, более общих пространств

$$B_{p_0, p_1, \dots, p_n}^{l_1, l_2, \dots, l_n}(G)$$

С.М.Никольского-О.В.Бесова, пространств

$$W_{p_0, p_1, \dots, p_n}^{l_1, l_2, \dots, l_n}(G)$$

С.Л.Соболева – Л.Н.Слободецкого методом интегральных представлений, тем самым существенно развил эту теорию.

В работах О.В.Бесова были получены варианты интегральных представлений функций многих переменных, которые были применены при построении теории пространств

$W_p^l(G)$, $B_{p,\theta}^l(G)$ функций, определенных в n -мерных областях $G \subset E_n$, удовлетворяющих условию «рога», тем самым расширен класс областей, для которых справедливы теоремы вложения этих функциональных пространств.

Дальнейшие фундаментальные продвижения теории вложения этих функциональных пространств принадлежат С.Л.Соболеву, С.М.Никольскому, Л.Д.Кудрявцеву, О.В.Бесову, В.П.Ильину, П.И.Лизоркину, А.Д.Джабраилову, Т.И.Аманову, Я.С.Бугрову, С.В.Успенскому, А.С.Джафарову, Ж.Л.Лионсу и Э.Мадженесу, Х.Трибелю, В.Г.Мазье, В.И.Буренкову, Г.Н.Яковлеву, В.М.Кокилашвили, Г.В.Демиденко, В.Б.Шахмурову, В.С.Гулиеву, М.С.Джабраилову, Р.М.Рзаеву, А.М.Наджафову и др.

А.Д.Джабраиловым доказаны новые интегральные представления функций многих переменных, с помощью которых ему удалось построить общую теорию пространств функций, с доминирующей смешанной производной

$$S_p^r W(G) \text{ и } S_{p,\theta}^r B(G),$$

с дальнейшей разработкой метода интегральных представлений в теории теоремы вложения этих пространств.

В работе А.Д.Джабраилова и его учеников получены принципиально – новые интегральные представления функций многих переменных, с помощью которых исследованы функциональные пространства типа

W - пространств,

B - пространств,

определенных с помощью набора из $(n+1)$ смешанных дифференциальное – разностных характеристик функций n -

переменных, а также функциональные пространства типа

SW - пространств,

SB - пространств,

определенных с помощью набора из 2^n смешанных дифференциально – разностных характеристик функций n -переменных.

За последние годы А.Д.Джабраиловым и его учениками разработан метод интегральных представлений в теории пространств функций многих переменных.

Диссертационная работа посвящена построению теории новых функциональных пространств, дифференцируемых функций многих переменных.

Цель работы. Целью диссертационной работы является построение теории новых функциональных пространств дифференцируемых функций многих переменных. Получены весовые интегральные представления, теорема вложения, теорема интерполяции пространств типа Бесова и аппроксимации функций в этих пространствах.

Общая методика исследования. В работе использованы методы теории функций вещественной переменной, теории функциональных пространств, интегральных представлений функций, теоремы вложения и функционального анализа.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты:

- интегральные представления функций, из построенных пространств;
- теоремы вложения из построенных пространств;
- теорема интерполяции типа Бесова из построенных пространств;

- аппроксимации функций из построенных пространств;

Теоретическая и практическая ценность.

Теоретическая и практическая значимость исследований, проведенных в диссертационной работе, заключается в том, что полученные новые результаты представляют самостоятельный интерес в теории функциональных пространств, кроме того, имеют применения в теории дифференциальных уравнений в частных производных при решении граничных задач и при исследовании дифференциальных свойств обобщенных решений квазиэллиптических и гипоеллиптических дифференциальных уравнений.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинарах отдела "Математический анализ" ИММ НАН Азербайджана (рук. член. кор. НАН Азербайджана, проф. В.С. Гулиев); на семинарах отдела "Функциональный анализ" ИММ НАН Азербайджана (д.ф.-м.н., проф. Г.Ш. Асланов); на семинарах отдела "Дифференциальные уравнения"

ИММ НАНА (рук. д.ф.-м.н., проф., А.Б. Алиев); на семинарах отдела "Негармонический анализ" ИММ НАНА (рук. член. кор. проф. Б.Т. Билалов); на семинарах отдела "Теория функций" ИММ НАН Азербайджана (рук. д.м.н. В.А. Исмаилов).

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 11 научных статьях автора, приведенных в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав и списка литературы из 77 наименований. Основное содержание изложено на 112 страницах.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Пусть $x = (x_1, \dots, x_s) \in E_n$ ($1 \leq s \leq n$) многих пачек переменных $x_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n_k}) \in E_{n_k}$ ($k=1, \dots, s$), определенных в областях $G \subset E_n = E_{n_1} \times \dots \times E_{n_s}$ ($n_1 + \dots + n_s = n$), удовлетворяющих условие « (φ, s) »-полурога, в виде $D^\nu f(x) = \sum_{i \in \mathcal{E}} A_i f(x)$, где сумма берется по всевозможным векторам $i = (i_1, \dots, i_s) \in \mathcal{E}$ с координатами $i_k \in \{0, 1, \dots, n_k\}$ ($k=1, \dots, s$), при этом мощность множества $\mathcal{E}$ равна $|\mathcal{E}| = \prod_{k=1}^s (1 + n_k)$, следовательно $(1+n) \leq |\mathcal{E}| \leq 2^n$.

Дифференциально – разностные характеристики интегральных операторов $A_i f(x)$ $i \in \mathcal{E}$ определяются векторами

$$r^i = (r_1^{i_1}, \dots, r_s^{i_s}), \quad N^i = (N_1^{i_1}, \dots, N_s^{i_s})$$

с координатами-векторами

$$r_k^{i_k} = (r_{k,1}^{i_k}, \dots, r_{k,n_k}^{i_k}), \quad N_k^{i_k} = (N_{k,1}^{i_k}, \dots, N_{k,n_k}^{i_k})$$

($k=1, 2, \dots, s$), при всех $i = (i_1, \dots, i_s) \in \mathcal{E}$, которые связаны с вектором

$$v = (v_1, \dots, v_s), \quad v_k = (v_{k,1}, \dots, v_{k,n_k}), \quad (k=1, 2, \dots, s)$$

условиями «согласования».

Это новое интегральное представление функций многих пачек переменных лежит на основе разработки метода интегральных представлений в теории пространств функций многих пачек переменных, т.е. построена общая теория пространств

$$\begin{cases} W = \bigcap_{i \in \mathcal{E}} L_{p_i}^{<r^i + \alpha^i; N^i>}(G, s) \\ B = \bigcap_{i \in \mathcal{E}} L_{p_i, \theta_i}^{<r^i + \alpha^i; N^i>}(G, s) \end{cases} \quad (1)$$

при этом, в построении этих пространств, разбиение переменных аргумента функции $y=f(x)$ на пачки $x_k=(x_{k,1}, \dots, x_{k,n_k})$, ($k=1, 2, \dots, s$) играют доминирующую роль, т.е. пространства (1) при $s=1$ обобщают известные функциональные пространства

$W_p^l(G)$ -С.Л.Соболева, Л.Н.Слободецкого,

$B_{p,\theta}^l(G)$ - С.М.Никольского, О.В.Бесова

соответственно, а при $s=n$ обобщают известные пространства функций, доминирующей смешанной производной типа пространств $S_p^l W(G)$ С.М.Никольского, П.И.Лизоркина, А.Д.Джабраилова, $S_{p,\theta}^l B(G)$ С.М.Никольского, А.Д.Джабраилова, Т.И.Аманова, а также более общие пространства, приведенные в работах В.П.Ильина, А.Д.Джабраилова, О.В.Бесова, П.И.Лизоркина, Т.И.Аманова, А.С.Джафарова, А.М.Наджафова и других.

Вводятся основные функциональные пространства дифференцируемых функций многих переменных, определенных в областях, удовлетворяющих условию «переменного $\psi(x, H)$ -полурога». Определяется класс областей, удовлетворяющих условию «переменного $\psi(\cdot, H)$ -полурога».

В данной диссертационной работе приводятся определения основных пространств дифференцируемых функций многих пачек переменных, определенных в области

$G \subset E_n$. Определяется класс областей, удовлетворяющих условию «переменного $\Psi(x, h)$ -полуугола» и исследуются дифференциальные свойства функций в области $G \subset E_n$, при этом аппаратом исследования являются новые интегральные представления функций многих переменных в точках $x \in E_n$.

Эти новые интегральные представления дифференцируемых функций приводят к исследованию, дифференциальных, дифференциально-разностных и граничных свойств, соответствующих классов интегральных операторов, типа потенциала и классов сингулярных интегральных операторов.

Интегральные представления дифференцируемых, функций многих пачек переменных, приведенных в точках $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_n$ ($1 \leq s \leq n$) порождают новые функциональные пространства, обобщающие известные функциональные пространства академика С.Л.Соболева – профессора В.Н.Слободецкого, известные пространства академиков С.М.Никольского – О.В.Бесова, известные пространства функций с доминирующей смешанной производной приведенных в работах С.М.Никольского, А.Дж.Джабраилова, П.И.Лизоркина, Т.И.Аманова, О.В.Бесова, С.Патапова и других, а также известных «весовых» пространств С.Л.Соболева – Л.Д.Кудрявцева и более общих пространств, приведенных в работах А.Дж.Джабраилова и его учеников.

Пусть $1 \leq s \leq n$, где s, n -натуральные числа, при этом $n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$. Рассматриваем функции $f = f(x)$ точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_s) \in E_n$ многих пачек переменных

$x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n_k}) \in E_{n_k} \quad (k = 1, \dots, s)$, определенных в области $G \subset E_n = E_{n_1} \times \dots \times E_{n_s}$.

Вводим обозначения

$$\|f\|_{p,G} = \left(\int_G |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

при $1 \leq p < \infty$, а в случае $p = \infty$

$$\|f\|_{\infty,G} = \text{vrai sup}_{x \in G} |f(x)|,$$

при этом

$$\begin{cases} dx = dx_1 \cdots dx_s, \\ dx_k = dx_{k,1} \cdots dx_{k,n_k} \quad (k = 1, 2, \dots, s). \end{cases}$$

Вектор $m = (m_1, \dots, m_s)$ с координатами-векторами $m_k = (m_{k,1}, \dots, m_{k,n_k}) \quad (k = 1, 2, \dots, s)$ назовем «целочисленным неотрицательным» вектором, если $m_{k,j} \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n_k)$ являются целыми при всех $k = 1, 2, \dots, s$.

Тогда через

$$D^m f(x) = D_1^{m_1} \cdots D_s^{m_s} f(x_1, \dots, x_s),$$

где

$$D_k^{m_k} f = D_{k,1}^{m_{k,1}} \cdots D_{k,n_k}^{m_{k,n_k}} f(x) = \frac{\partial^{|m_k|} f(x)}{\partial x_{k,1}^{m_{k,1}} \cdots \partial x_{k,n_k}^{m_{k,n_k}}} \quad (k = 1, 2, \dots, s),$$

$$|m_k| = m_{k,1} + \cdots + m_{k,n_k} \quad (k = 1, 2, \dots, s),$$

обозначается смешанная производная функция $f = f(x)$, соответствующая вектору $m_k = (m_{k,1}, \dots, m_{k,n_k}) \quad (k = 1, 2, \dots, s)$.

Пусть

$$\Delta^m(t)f(x) = \Delta_1^{m_1}(t_1) \cdots \Delta_s^{m_s}(t_s)f(x),$$

где

$$\Delta_k^{m_k}(t_k)f = \Delta_{k,1}^{m_{k,1}}(t_{k,1}) \cdots \Delta_{k,n_k}^{m_{k,n_k}}(t_{k,n_k})f$$

при всех $k = 1, \dots, s$, при этом

$$\Delta_{k,j_k}^{m_{k,j_k}}(t_{k,j_k})f \quad (j_k = 1, 2, \dots, n_k)$$

является конечной разностью функции $f = f(x)$ по направлению к переменной x_{k,j_k} с шагом $t_{k,j}$ порядка m_{k,j_k} при всех $k = 1, 2, \dots, s$, следовательно,

$$\Delta_{k,j_k}^1(t_{k,j_k})f(\dots, x_{k,j_k}, \dots) = f(\dots, x_{k,j} + t_{k,j_k}, \dots) - f(\dots, x_{k,j_k}, \dots),$$

$\Delta_{k,j_k}^{m_{k,j_k}}(t_{k,j_k})f(\dots, x_{k,j_k}, \dots) = \Delta_{k,j_k}^1(t_{k,j_k})\{\Delta_{k,j_k}^{m_{k,j_k}-1}(t_{k,j_k})f(\dots, x_{k,j}, \dots)\}$, а в случае $m_{k,j} = 0$

$$\Delta_k^0(t_{k,j_k})f(\dots, x_{k,j_k}, \dots) = f(\dots, x_{k,j}, \dots).$$

В этих обозначениях $\Delta^m(t)f(x)$ называется смешанной (кратной) разностью функций $f = f(x)$, соответствующей вектору $m_k = (m_{k,1}, \dots, m_{k,n_k})$ ($k = 1, 2, \dots, s$) со смешанным шагом $t = (t_1, \dots, t_s)$, $t_k = (t_{k,1}, \dots, t_{k,n_k})$ ($k = 1, 2, \dots, s$).

Пусть область $G \subset E_n$. В этом случае обозначим через $\Delta^m(t, G)f = \Delta^m(t)f$, если смешанная кратная разность строится по вершинам многогранника, целиком лежащего G области $G \subset \bar{E}_n$, а в противном случае полагаем $\Delta^m(t, G)f = 0$.

Пусть $r = (r_1, \dots, r_s)$ является «неотрицательным вектором»

с координатами-векторами $r_k = (r_{k,1}, \dots, r_{k,n_k})$ ($k=1, 2, \dots, s$), т.е. $r_{k,j} \geq 0$ ($j=1, 2, \dots, n_k$) при всех $k=1, 2, \dots, s$.

Каждому такому «неотрицательному вектору» $r = (r_1, \dots, r_s)$ с координатами-векторами $r_k = (r_{k,1}, \dots, r_{k,n_k})$ ($k=1, 2, \dots, s$) ставится в соответствие «целочисленный неотрицательный вектор» $[r] = ([r_1], \dots, [r_s])$ с координатами-векторами, $[r_k] = ([r_{k,1}], \dots, [r_{k,n_k}])$ ($k=1, 2, \dots, s$) где через $[r_{k,j}]$ обозначена целая часть $r_{k,j}$ при $j=1, 2, \dots, n_k$ и при всех $k=1, 2, \dots, s$, следовательно, $0 \leq \alpha_{k,j} = r_{k,j} - [r_{k,j}] < 1$ ($j=1, 2, \dots, n_k$) при всех $k=1, 2, \dots, s$.

Обозначим через

$$e_k = \text{supp } r_k$$

носителя вектора-координата $r_k = (r_{k,1}, \dots, r_{k,n_k})$, т.е. e_k является множеством вторых индексов, отличных от нуля координат вектора r_k , следовательно, $e_k \subset \{1, 2, \dots, n_k\}$ при всех $k=1, 2, \dots, s$, при этом $r_{k,j} > 0$ ($j \in e_k$) при всех $k=1, \dots, s$.

Обозначим через

$$e_k^* = \text{supp}(r_k - [r_k]),$$

т.е. e_k^* является множеством вторых индексов не целых координат вектора $r_k = (r_{k,1}, \dots, r_{k,n_k})$, следовательно, $e_k^* \subset e_k \subset \{1, 2, \dots, n_k\}$ при всех $k=1, 2, \dots, s$, при этом $r_{k,j}$ ($j \in e_k^*$) являются не целыми положительно числами при каждом $k \in \{1, 2, \dots, s\} = e_s$.

Вводим полунорму равенствами

$$\|f\|_{L_p^{<r>}(G,s)} = \left(\int_{E_{|e^*|}} \left\| \frac{\Delta^{\omega^*}(t,G) D^{[r]} f}{\varphi(t)} \right\|_{p,G} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2)$$

при $1 \leq p < \infty$, а в случае $p = \infty$

$$\|f\|_{L_{\infty}^{<r>}(G,s)} = \text{vrai sup}_{x \in G, t \in E_{|e^*|}} \left| \frac{\Delta^{\omega^*}(t,G) D^{[r]} f(x)}{\varphi(t)} \right|. \quad (3)$$

В (2) и (3) e^* -является множеством тех $k \in \{1, 2, \dots, s\} = e_s$, для которых $e_k^* \neq \emptyset$, а $\varphi(t) = \prod_{k \in e^*} \prod_{j \in e_k^*} |t_{k,j}|^{\alpha_{k,j}}$, где $\alpha_{k,j} = r_{k,j} - [r_{k,j}]$ ($j = 1, 2, \dots, n_k$) при всех $k \in e^*$.

Заметим, что

$$\frac{dt}{t} = \prod_{j \in e^*} \prod_{j \in e_k^*} \frac{dt_{k,j}}{t_{k,j}},$$

а вектор $\omega^* = (\omega_1^*, \dots, \omega_s^*)$ с координатами-векторами $\omega_k^* = (\omega_{k,1}^*, \dots, \omega_{k,n_k}^*)$ ($k = 1, 2, \dots, s$) где $\omega_{k,j}^* = 1$ либо $\omega_{k,j}^* = 0$, но $\text{supp } \omega_k^* = e_k^* = \text{supp}(r_k - [r_k])$

при всех $k = 1, 2, \dots, s$.

Пусть Q является множеством всевозможных векторов $i = (i_1, \dots, i_s)$, с координатами $i_k \in \{0, 1, 2, \dots, n_k\}$ ($k = 1, 2, \dots, s$), при этом заметим, что количество всевозможных векторов $i = (i_1, \dots, i_s) \in Q$ равно $|Q| = \prod_{k=1}^s (1 + n_k)$, следовательно

$$(n+1) \leq |Q| \leq 2^n, (n = n_1, \dots, n_s).$$

С помощью множества векторов $i = (i_1, \dots, i_s) \in Q$, определяем набор следующих «целочисленных неотрицательных векторов»

$$\left. \begin{aligned} m^i &= (m_1^{i_1}, \dots, m_s^{i_s}) \\ N^i &= (N_1^{i_1}, \dots, N_s^{i_s}) \end{aligned} \right\}, \quad i = (i_1, \dots, i_s) \in Q,$$

с координатами-векторами

$$\left. \begin{aligned} m_k^{i_k} &= (m_{k,1}^{i_k}, \dots, m_{k,n_k}^{i_k}) \\ N_k^{i_k} &= (N_{k,1}^{i_k}, \dots, N_{k,n_k}^{i_k}) \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots, s)$$

соответственно. Это означает, что $m_k^{i_k} \geq 0, N_k^{i_k} \geq 0 (j = 1, 2, \dots, n_k)$ целые при $i = (i_1, \dots, i_s) \in Q$ и при всех $k = 1, 2, \dots, s$.

Полагаем, что для области $G \subset E_n$, при каждом $i = (i_1, \dots, i_s) \in Q$,

$$\Delta^{N^i}(t; G)g(x) = \Delta^{N^i}(t)g(x) = \Delta_1^{N_1^{i_1}}(t_1) \cdots \Delta_s^{N_s^{i_s}}(t_s)g(x)$$

строится по вершинам многогранника, целиком лежащего в области $G \subset E_n$, а в противном случае полагаем, что $\Delta^{N^i}(t; G)g(x) = 0$.

Определение. Пространством

$$Q\Lambda = \bigcap_{i \in Q} \Lambda_{p_i, \theta_i}^{<m^i, N^i>}(G, \varphi^i)$$

называется замыкание множества достаточно финитных в E_n функции $f(x)$ по норме

$$\|f\|_{Q\Lambda} = \sum_{i \in Q} \|f\|_{\Lambda_{p_i, \theta_i}^{<m^i, N^i>}(G, \varphi^i)} =$$

$$= \sum_{i \in Q} \left\{ \int_{E_{|\varepsilon_{N^i}|}} \left\| \frac{\Delta^{N^i} \left(\frac{z}{N^i}; G \right) D^{m^i} f(\cdot)}{\prod_{k \in \varepsilon_{N^i}} \prod_{j \in \varepsilon_{N_k^i}} \phi_{k,j}^{i_k}(z_{k,j})} \right\|_{L_{p_i}(G)}^{\theta_i} \frac{dz}{z} \right\} < \infty,$$

где сумма берется по всевозможным векторам $i = (i_1, \dots, i_s) \in Q$,

если $1 \leq p_i \leq \theta_i < \infty (i \in Q)$, при этом $\frac{dz}{z} = \prod_{k \in \varepsilon_{N^i}} \prod_{j \in \varepsilon_{N_k^i}} \frac{dz_{k,j}}{z_{k,j}}$.

В случае $\theta_i = \infty (i \in Q)$ полагается, что

$$\|f\|_{Q\Lambda} = \sum_{i \in Q} \|f\|_{\Lambda_{p_i, \infty}^{<m^i, N^i>}(G, \varphi^i)} =$$

$$\sum_{i \in Q} \sup_{z \in E_{|\varepsilon_{N^i}|}} \left\| \frac{\Delta^{N^i} \left(\frac{z}{N^i}; G \right) D^{m^i} f(\cdot)}{\prod_{k \in \varepsilon_{N^i}} \prod_{j \in \varepsilon_{N_k^i}} \phi_{k,j}^{i_k}(z_{k,j})} \right\|_{L_{p_i}(G)},$$

где

$$|m^i| = |m_1^{i_1}| + \dots + |m_s^{i_s}| = (m_{1,1}^{i_1} + \dots + m_{1,n_1}^{i_1}) + \dots + (m_{s,1}^{i_s} + \dots + m_{s,n_s}^{i_s}),$$

$$D^{m^i} f(x) = D_1^{m_1^{i_1}} \dots D_s^{m_s^{i_s}} f(x_1, \dots, x_s),$$

$$D_k^{m_k^i} f(..., x_k, ...) = \frac{\partial^{m_k^i} f(..., x_k, ...)}{\partial x_{k,1}^{m_{k,1}^i} \dots \partial x_{k,n_k}^{m_{k,n_k}^i}} (k = 1, 2, \dots, s).$$

Заметим, что (при каждом $i = (i_1, \dots, i_s) \in Q$) вектор-функция $\varphi^i(t) = (\varphi_1^{i_1}(t_1), \dots, \varphi_s^{i_s}(t_s))$, с координатами вектор-функциями $\varphi_k^{i_k}(t_k) = (\varphi_{k,1}^{i_k}(t_{k,1}), \dots, \varphi_{k,n_k}^{i_k}(t_{k,n_k}))$ ($k = 1, 2, \dots, s$), такая, что $\varphi_{k,j}^{i_k}(t_{k,j}) > 0$ при $t_{k,j} \neq 0$, при этом $\varphi_{k,j}^{i_k}(t_{k,j}) \downarrow 0$ при $t_{k,j} \downarrow 0$ ($j = 1, 2, \dots, n_k$) ($k = 1, 2, \dots, s$).

Множество (при каждом $i = (i_1, \dots, i_s) \in Q$)

$$E_{|\varepsilon_{N^i}|} = \prod_{k \in \varepsilon_{N^i}} E_{|\varepsilon_{N_k^{i_k}}|}$$

является прямым произведением множеств

$$E_{|\varepsilon_{N_k^{i_k}}|} = \left\{ z_k \in E_{n_k}; z_{k,j} = 0 (j \in \{1, 2, \dots, n_k\} \setminus \varepsilon_{N_k^{i_k}}) \right\},$$

этом множество $\varepsilon_{N_k^{i_k}} = \supp N_k^{i_k}$ является носителем координат-

вектора $N_k^{i_k} = (N_{k,1}^{i_k}, \dots, N_{k,n_k}^{i_k})$, т.е. это множество вторых индексов координат вектора, для которых соответствующие координаты $N_{k,j}^{i_k} \neq 0$, следовательно $\varepsilon_{N^i} = \left\{ k \in e_s = \{1, 2, \dots, s\}; \varepsilon_{N_k^{i_k}} \neq \emptyset \right\}$.

Область $G \subset E_n$ называется подобластью, удовлетворяющей условие $a(h)$ -полурога, т.е. $G \in C(a(h))$ если существует конечное число подобластей $G_1, G_2, \dots, G_N \subset G$,

покрывающих область $G \subset \bigcup_{\mu=1}^N G_{\mu}$, где $a(v) = (a_1(v_1), \dots, a_s(v_s))$ с координатами вектор-функциями

$$a_k(v_k) = (a_{k,1}(v_1), \dots, a_{k,n_k}(v_k)), \frac{d}{dv_k} a_{k,j}(v_k) > 0, \lim_{v_k \rightarrow 0+} a_{k,j}(v_k) = 0$$

$j = 1, 2, \dots, n_k$; $k = 1, 2, \dots, s$. Обозначим через

$$R_{\delta_k}(a_k(h_k)) = \bigcup_{0 < v_k \leq h_k} \left\{ y_k \in E_{n_k}; c_{k,j}^* \leq \frac{y_{k,j} \delta_{k,j}}{a_{k,j}(v_k)} \leq c_{k,j}^{**} (j = 1, 2, \dots, n_k) \right\},$$

$$c_{k,j} \leq \frac{y_{k,j} \delta_{k,j}}{a_{k,j}(v_k)} \leq c_{k,j}^* (j = 1, 2, \dots, n_k),$$

$\delta_k = (\delta_{k,1}, \dots, \delta_{k,n_k})$ при этом $\delta_{k,j} = 1$ либо $\delta_{k,j} = -1$

$(j = 1, 2, \dots, n_k)$ и $x + R_{\delta}(a(h))$,

$$R_{\delta}(a(h)) = R_{\delta_1}(a_1(h_1)) \times \dots \times R_{\delta_s}(a_s(h_s)).$$

Если наряду $G \subset \bigcup_{\mu=1}^N G_{\mu,\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$), $G_{\mu,\varepsilon} = \{y \in G_{\mu} : \rho(G \setminus G_{\mu}) > \varepsilon\}$.

Тогда говорят, что область удовлетворяет сильному условию " $a(h)$ -полурога", т.е. $G \in C(a(h))$.

Теорема 1. Пусть функция

$$f \in \bigcap_{i=(i_1, \dots, i_s) \in Q} \Lambda_{p_i, \theta_i}^{<m^i, N^i>}(G, \varphi^i),$$

где $1 \leq p_i \leq \theta_i \leq \infty, 1 \leq p_i \leq q \leq \infty (i \in Q)$, при этом

$$\text{supp}(m_k^{i_k} + N_k^{i_k}) \supset \{i_k\} \quad \text{при} \quad i_k \neq 0 (k = 1, 2, \dots, s, i \in Q), G \in C_{\varepsilon}(a(h)).$$

Пусть «целочисленный неотрицательный» вектор $v = (v_1, \dots, v_s)$,

с координатами-векторами $v_k = (v_{k,1}, \dots, v_{k,n_k})$ ($k = 1, 2, \dots, s$),

удовлетворяют условию $v_{k,j} \geq m_{k,j}^0 + N_{k,j}^0$ ($j = 1, 2, \dots, n_k$) в случае

$i_k = 0$; а в случае $i_k \neq 0$ условию $v_{k,j} \geq m_{k,j}^{i_k} + N_{k,j}^{i_k} \quad (j \neq i_k)$,
 $v_{k,i_k} < m_{k,i_k}^{i_k} + N_{k,i_k}^{i_k} \quad (j = i_k)$ при всех $k = 1, 2, \dots, s$ и при каждом
 $i = (i_1, \dots, i_s) \in Q$.

Далее (при каждом $i = (i_1, \dots, i_s) \in Q$) предполагается
конечность интегрального выражения

$$H_{k,i_k}(h_k) = \int_0^{h_k} \left\{ \prod_{j=1}^{n_k} (a_{k,j}(v_k))^{m_{k,j}^{i_k} - v_{k,j} - \frac{1}{p_i} + \frac{1}{q}} \prod_{\substack{j \in \varepsilon \\ i \\ N_k^k}} \varphi_{k,j}^{i_k}(a_{k,j}(v_k)) \right\} \frac{da_{k,i_k}(v_k)}{a_{k,i_k}(v_k)}$$

как только $i_k \neq 0$ (при соответствующей k).

Тогда в области $G \subset E_n$ существуют обобщенные
производные $D^\nu f \in L_q(G)$, при этом справедливы интегральные
неравенства

$$\|D^\nu f\|_{L_q(G)} \leq c \sum_{i=(i_1, \dots, i_s) \in Q} \left(\prod_{k=1}^s H_{k,i_k}(h_k) \right) \|f\|_{\Lambda_{p_i, \theta_i}^{<m_i, N_i>}(G, \varphi^i)},$$

где сумма берется по всевозможным векторам $i = (i_1, \dots, i_s) \in Q$,
и при некотором $h_0 = (h_{0,1}, \dots, h_{0,s})$, $0 < h_k < h_{0,k}$, $(k = 1, 2, \dots, s)$, c не
зависит от функции $f = f(x)$ и от $h_0 = (h_{0,1}, \dots, h_{0,s})$, а в случае
 $i_k = 0$

$$H_{k,0}(h_k) = \prod_{j=1}^{n_k} (a_{k,j}(h_k))^{m_{k,j}^0 - v_{k,j} - \frac{1}{p_i} + \frac{1}{q}} \prod_{\substack{j \in \varepsilon \\ N_k^0}} \varphi_{k,j}^0(a_{k,j}(h_k))$$

Теорема 2. Пусть удовлетворяются все условия
теоремы 1 и, кроме того, $l = (l_1, l_2, \dots, l_s)$, $M = (M_1, M_2, \dots, M_s)$ -
целочисленные неотрицательные вектора с координатами

векторами $l_k = (l_{1,k}, \dots, l_{k,n_k}), M_k = (M_{1,k}, \dots, M_{k,n_k}), l_k \geq 0, M_k \geq 0$,
 $\text{supp}(l_k + M_k) \supset \{i_k\}$, при $i_k \neq 0 \quad (k=1, 2, \dots, s), \quad \theta_i \leq \theta_j$;
 $v_{k,j} + l_{k,j} \geq m_{k,j}^0 + N_{k,j}^0 \quad (j=1, 2, \dots, n_k, i_k = 0), \quad v_{k,j} + l_{k,j} \geq m_{k,j}^{i_k} + N_{k,j}^{i_k}$, при
 всех $i_k \neq 0 \quad (j \neq i_k); v_{k,i_k} + l_{k,i_k} < m_{k,i_k}^{i_k} + N_{k,i_k}^{i_k} \quad (k=1, 2, \dots, s; i \in Q)$ и
 предполагается конечность интегрального выражения

$$H_{k,i_k}(h_k, l_k) = \int_0^{h_k} \left\{ \prod_{j=1}^{n_k} (a_{k,i}(v_k))^{m_{k,j}^{i_k} - v_{k,j} - \frac{1}{p_i} + \frac{1}{q} |l_k|} \times \right. \\
\left. \times \prod_{j \in \varepsilon_{N_k^{i_k}}} \varphi_{k,j}^{i_k}(a_{k,j}(v_k)) \right\} \frac{da_{k,i_k}(v_k)}{a_{k,i_k}(v_k)}, \quad \text{где } i_k \neq 0.$$

Тогда в области G существуют обобщенные производные $D^\nu f$, которые

$$\| D^\nu f \|_{\Lambda_{q,\theta}^{<l,M>}(\psi,G)} \leq c \sum_{i \in Q} \left(\prod_{k=1}^s H_{k,i_k}(h_k, l_k) \right) \| f \|_{\Lambda_{p,\theta}^{<m^i,N^i>}(G,\varphi^i)}.$$

Докажем две теоремы типа Рисс-Торина для функций из пространств $\bigcap_{i \in Q} \Lambda_{p_i^\lambda, \theta_i}^{<m^i,N^i>}(G, \varphi^i)$.

Пусть $\beta_\lambda \geq 0, \sum_{\lambda=1}^M \beta_\lambda = 1, \frac{1}{p_i} = \sum_{\lambda=1}^M \frac{\beta_\lambda}{p_i^\lambda}, \frac{1}{\theta_i} = \sum_{\lambda=1}^M \frac{\beta_\lambda}{\theta_i^\lambda}, m_{k,j}^{i_k} = \sum_{\lambda=1}^M \beta_\lambda m_{k,j}^{i_k, \lambda}$.

Теорема 3. Пусть $G \in C_\varepsilon(a(h)), \quad 1 \leq p_i^\lambda \leq q_i^\lambda \leq \infty$,
 $1 \leq p_i^\lambda \leq \theta_i^\lambda \leq \infty \quad (\lambda=1, 2, \dots, M, i \in Q); \quad v = (v_1, \dots, v_s)$ - целочисленный
 неотрицательный вектор с координатами-векторами
 $v_k = (v_{k,1}, \dots, v_{k,n_k}) \quad (k=1, 2, \dots, s)$ удовлетворяют условию

$v_{k,j} \geq m_{k,j}^0 + N_{k,j}^0 \quad (j=1,2,\dots,n_k) \text{ в случае } i_k=0; \text{ в случае } i_k \neq 0$
 условию $v_{k,j} \geq m_{k,j}^{i_k} + N_{k,j}^{i_k} \quad (j \neq i_k), \quad v_{k,j} < m_{k,j}^{i_k} + N_{k,j}^{i_k} \quad (j = i_k)$ при всех
 $k=1,2,\dots,s$ и при каждом $i=(i_1,\dots,i_s) \in Q$ и

$$f \in \bigcap_{\lambda=1}^M \bigcap_{i \in Q} \Lambda_{p_i^\lambda, \theta_i^\lambda}^{<m^{i,\lambda}, N^{i,\lambda}>} (G, \varphi^i).$$

Далее при каждом фиксированном $i \in Q$ предполагается
 конечность интегрального выражения

$$H_{k,i_k}(h_k) = \int_0^{h_k} \left\{ \prod_{j=1}^{n_k} (a_{k,j}(h_k)) \sum_{\lambda=1}^M m_{k,j}^{i_k,\lambda} \beta_{\lambda}^{-v_{k,j}} p_i^{-\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i}} \prod_{j \in E_{N_k^{i_k}}} \varphi_{k,j}^{i_k}(a_{k,j}(v_k)) \right\} \frac{da_{k,i_k}(v_k)}{a_{k,i_k}(v_k)}$$

как только $i_k \neq 0$ при соответствующих k .

Тогда в области $G \subset E_n$ существуют обобщенные
 производные $D^v f$, при этом справедливы неравенства

$$\|D^v f\|_{L_q(G)} \leq C \sum_{i \in Q} \left(\prod_{k=1}^s H_{k,i_k}(h_k) \right) \prod_{\lambda=1}^M \|f\|_{\Lambda_{p_i^\lambda, \theta_i^\lambda}^{<m^{i,\lambda}, N^{i,\lambda}>} (G, \varphi^i)}^{\beta_\lambda}$$

где сумма берется по всевозможным векторам $i \in Q$ и при
 некотором $h_0 = (h_{0,1}, \dots, h_{0,s}), \quad 0 < h_k < h_{0,k} \quad (k=1,2,\dots,s), \quad C$
 постоянная не зависящая от f и от h_0 , а в случае $i_k = 0$

$$H_{k,0}(h_k) = \prod_{j=1}^{n_k} (a_{k,j}(h_k)) \sum_{\lambda=1}^M m_{k,j}^{0,\lambda} \beta_{\lambda}^{-v_{k,j}} p_\lambda^{-\frac{1}{p_\lambda} + \frac{1}{q_\lambda}} \prod_{j \in E_{N_k^0}} \varphi_{k,j}^0(a_{k,j}(h_k))$$

Теорема 4. Пусть удовлетворяются все условия
 теоремы 3 и, кроме этого $l=(l_1,\dots,l_s), \quad r=(r_1,\dots,r_s)-$

целочисленный неотрицательный вектор с координатами векторами $l_k = (l_{k,1}, \dots, l_{k,n_k})$, $r_k = (r_{k,1}, \dots, r_{k,n_k})$, $l_k \geq 0$, $r_k \geq 0$ и $\text{supp}(l_k + r_k) \supset \{i_k\}$ при $i_k \neq 0$ ($k=1,2,\dots,s$), $\theta_i \leq \theta_1$; а также $v_{k,j} + l_{k,j} \geq m_{k,j}^0 + N_{k,j}^0$ ($j=1,2,\dots,n_k$, $i_k=0$), $v_{k,j} + l_{k,j} \geq m_{k,j}^{i_k} + N_{k,j}^{i_k}$ при всех $i_k \neq 0$ ($j \neq i_k$); $v_{k,j} + l_{k,j} < m_{k,j}^{i_k} + N_{k,j}^{i_k}$ ($k=1,2,\dots,s$) $i \in Q$ и предполагается конечность интегрального выражения

$$H_{k,i_k}(h_k, l_k) = \int_0^{h_k} \left\{ \prod_{j=1}^{n_k} (a_{k,j}(v_k)) \sum_{\lambda=1}^M m_{k,j}^{i_k, \lambda} \beta_{\lambda}^{-v_{k,j}} p_i^{-\frac{1}{q} + |l_k|} \prod_{j \in E_{N_k^{i_k}}} \varphi_{k,j}^{i_k}(a_{k,j}(v_k)) \right\} \frac{da_{k,i_k}(v_k)}{a_{k,i_k}(v_k)},$$

при $i_k \neq 0$.

Тогда в области G существуют обобщенные производные $D^v f$, для которых справедливы неравенства

$$\|D^v f\|_{\Lambda_{q,\theta}^{<l,r>}(G,\psi)} \leq C \sum_{i \in Q} \left(\prod_{k=1}^s H_{k,i_k}(h_k, l_k) \right) \prod_{\lambda=1}^M \|f\|_{\Lambda_{p_i^{\lambda}, \theta_i^{\lambda}}^{<m^{i,\lambda}, N^{i,\lambda}>}(G, \varphi^i)}^{\beta_{\lambda}}.$$

Теорема 5. Пусть $1 \leq p_i \leq \theta_i < \infty$ ($i \in Q$), $G \in C_{\varepsilon}(H^{\sigma})$ и

$f \in \bigcap_{i \in Q} \Lambda_{p_i, \theta_i}^{<m^i, N^i>}(G, \varphi^i)$. Тогда можно построить

последовательность $\varphi_v = \varphi_v(x)$ ($v=1,2,\dots$) бесконечно дифференцируемых в E_n функций, для которых

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \|f - \varphi_v\|_{\bigcap_{i \in Q} \Lambda_{p_i, \theta_i}^{<m^i, N^i>}(G, \varphi^i)} = 0.$$

Получены новые весовые интегральные представления

$$Q_k(x, v; f) = \frac{(-1)^{|m^k - v|} c_k}{\prod_{j=1}^n (\Psi_j(x, v))^{1-m_j^k + v_j} \prod_{j \in \mathcal{E}_{N^k}} \Psi_j(x, v)} \times$$

$$\times \int_{E_{|G_{N^k}|}} dz \int_{E_n} \left\{ \Delta_j^{N^k} \left(\frac{z}{N^k} \right) D^{m^k} f(x+y) \right\} \Phi_{k,\delta} \left(\frac{y}{\Psi(x,v)}; \frac{z}{\Psi(x,v)} \right) dy.$$

Автор также выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору А.Д.Джабраилову за обсуждение полученных результатов и постоянное внимание к работе.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Джабраилов А.Д., Нейматов Н.А. Теоремы вложения «весовых» пространств функций, с конечным набором дифференциально-разностных свойств. «Azərbaycan Texniki Universitetini "Elmi əsərləri" №2, cild XI(42), Bakı-2012, s.121-126»
2. Джабраилов А.Д., Нейматов Н.А. Новые функциональные пространства дифференцируемых функций и теоремы вложения. «Azərbaycan Texniki Universitetini "Elmi əsərləri" №2, cild XI(43), Bakı-2012, s.94-98»
3. Нейматов Н.А. Теоремы вложения "весовых" пространств функций, с набором дифференциально-разностных свойств. «Pedaqoji Universitetin Xəbərləri №1, 2013, s.7-11»
4. Нейматов Н.А. Об одной форме интегрального представления с "весом" для дифференцируемых функций многих переменных. «Naxçıvan Dövlət Universiteti, "Elmi əsərlər", Fizika-riyaziyyat və texniki elmləri seriyası, №1(51), 2013, s.49-51»
5. Нейматов Н.А. Граничные свойства функций из весовых пространств функций со смешанными дифференциально-разностными характеристиками. «Modern Problems of the

Analysis of Dynamic Systems Appendices in Equipment and Technologies, Voronezh, 2014, s.347-352»

6. Нейматов Н.А. Варианты интегральных представлений дифференцируемых функций. «Научное обозрение», Научных журналов ВАК РФ , №2, 2014, s. 84-94»

7. Нейматов Н.А. Вопросы аппроксимации функций из пространства $Q\Lambda$. ««Актуальные проблемы математики и механики» материалы Международной конференции, посвященной 55-летию Института Математики и Механики, Баку, 2014, s.287-288»

8. Neymatov N.A. New functional spaces of differentiable functions and imbedding theorems. Pros. of Nat. Acad. Sci. of Azerb., 2013, v.XXXIX(XLVII), pp. 111-120.

9. Neymatov N.A. The Problems on Approximation of Functions from Space $Q\Lambda$. «Pioneer Journal of Matematics and Mathematical Sciences, Varanasi, India, Volume11, Issue1, May 2014, pages 9-17»

10. Neymətov N.Ə. Diferensiallanan funksiyalarda L_p -normalı "çəkili" integral bərabərsizliklər. «Gəncə Dövlət Universiteti, "Riyazi nəzəriyyələr, onların tətbiqi və tədrisi sahəsində olan problemlər" Beynəlxalq Konfrans, 2011, s.41-42»

11. Neymatov N.A. Theorems on interpolation of Besov type spaces. «Pros. of Nat. Acad. Sci. of Azerb., 2014, v.XXXIV, № 4, pp.85-92»

NAZİM ƏSƏDULLA OĞLU NEYMƏTOV

ÇƏKİLİ İNTEQRAL GÖSTƏRİLİŞ VƏ BƏZİ ÇƏKİLİ DAXİLOLMA TEOREMLƏRİ

XÜLASƏ

Dissertasiya işinin məqsədi çoxdəyişənli diferensiallanan funksiyalardan ibarət yeni funksional fəzaların qurulmasına həsr olunmuşdur.

Dissertasiya işində aşağıdakı nəticələr alınmışdır:

1. Yeni qurulmuş fəzalarda inteqrallanan funksiyaların yeni inteqral göstərilişi tədqiq edilmiş.
2. Qurulmuş yeni fəzalarda daxilolma teoremləri isbat edilmiş.
3. Həmin fəzalarda Besov tipli interpolyasiya teoremi isbat edilmiş.
4. Qurulmuş yeni fəzalarda funksiyaların aproksimasiyası teoremi isbat edilmişdir.

NAZIM ASADULLAH OGLU NEYMATOV

**WEIGHTED INTEGRAL REPRESENTATIONS AND
SOME WEIGHT EMBEDDING THEOREM**

ANNOTATION

The thesis is devoted to the construction of the theory of new functional spaces of differentiable functions of many variables.

The main results of the thesis are composed as follows:

1. Obtained weighing integral representations of functions of the built environment;
2. Theorems investments of built spaces;
3. Theorems interpolation of Besov of building space;
4. The theorem of approximation of functions from the built spaces.

Подписано к печати 23.10.2015
Тираж 100. Заказ 478

**Участок подготовки информационных
материалов ИСУ НАН Азербайджана**
Тел(+012)539-28-26

**AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU**

Əlyazma hüququndadır

NAZİM ƏSƏDULLA OĞLU NEYMƏTOV

**ÇƏKİLİ İNTEQRAL GÖSTƏRİLİŞ VƏ
BƏZİ ÇƏKİLİ DAXİLƏLMA TEOREMLƏRİ**

1202.01 – Analiz və funksional analiz

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A F T O R E F E R A T I

Bakı - 2015