

**AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU**

Əlyazması hüququnda

MUHAMMET DURSUN OĞLU KARAASLAN

**İKİ TƏRTİBLİ OPERATOR-DİFERENSİAL
TƏNLİKLƏRİN HƏLLİ VƏ BƏZİ SPEKTRAL
MƏSƏLƏLƏR**

1202.01 – Analiz və funksional analiz

**Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın**

AVTOREFERATI

Bakı – 2015

Dissertasiya işi Naxçıvan Dövlət Universitetinin “Riyazi analiz” kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru,
professor Sabir S. Mirzəyev

Rəsmi opponətlər:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. Nizaməddin Ş. İsgəndərov
(Bakı Dövlət Universiteti);

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dos. Telman B. Qasımov
(AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu).

Aparıcı təşkilat: Azərbaycan Memarlıq və İnşaat Universiteti
"Ali riyaziyyat" kafedrası

Dissertasiyanın müdafiəsi 23 oktyabr 2015-ci il saat 14⁰⁰-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində riyaziyyat üzrə elmlər doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün D 01.111 dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç., 9.

Avtoreferat göndərilib 4 sentyabr 2015-ci il.

AMEA RMİ-D 01.111
Dissertasiya şurasının
elmi katibi

dosent Rövşən Bəndəliyev

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı. Dissertasiya işi bir sinif iki tərtibli elliptik tip operator-diferensial tənliklər üçün sonlu oblastda sərhəd məsələlərinin tədqiqinə və onlarla bağlı bəzi spektral məsələlərin öyrənilməsinə həsr edilmişdir.

Operator-diferensial tənliklər nəzəriyyəsi E.Xille, R.Fillips, T.Kato, K.İosidanın işlərində, funksional analizın xüsusi törəmali diferensial tənliklər nəzəriyyəsinə tətbiqi kimi meydana gəlmişdir. İlk dəfə bu işlərdə operator-diferensial tənliklərin həll olunması ilə operator əmsalın spektral xassələri arasındakı əlaqə də göstərilmişdir. Sonralar operator-diferensial tənliklərin həll olunması sahəsində S.Q.Kreynin, J.-L.Lions və E.Madjenesin, M.L.Qorbaçukun, C.Y.Yakubovun, M.Q.Qasimovun, Y.A.Dubinskiyin, A.Q.Kostyuçenkonun, V.K.Ro-mankonun, N.İ.Yurçukun, A.B.Əliyevin, B.Ə.Əliyevin, H.İ.As-lanovun, M.S.Cəbrayilovun, S.S.Mirzəyevin, A.R.Əliyevin, A.A.Şkali-kovun və s. işlərində mühüm nəticələr alınmışdır.

Operator-diferensial tənliklərə marağın artmasının əsas səbəbi onun xüsusi törəmali diferensial tənliklərin, mexanikanın, riyazi fizikanın və s. bir çox məsələlərinin eyni bir metodla həll etməyə imkan verməsidir. Bu sahədə çoxlu işlərin meydana çıxmasının bir səbəbi də onların operator dəstələrin spektral nəzəriyyəsi ilə sıx əlaqədə olmasıdır. Bu əlaqə M.V.Keldişin, M.Q.Kreyn və Q.K.Lanqerin, M.Q.Qasimovun, Y.A.Dubinskiyin, A.Q.Kostyuçenko və A.A.Şkali-kovun və s. işlərində özünü daha aydın göstərir. Buna görə də operator dəstələr nəzəriyyəsində yeni və maraqlı nəticələr alınmışdır. Bu işlərin arasında C.E.Allahverdiyevin, Ə.M.Əhmədovun, A.S.Markusun, M.Q.Qasimovun, Q.V.Radziyevskinin və s. işlərini qeyd edək.

Qeyd edək ki, operator-diferensial tənliklərin bütün oxda və yarımoxda tədqiqi sahəsində çox mühüm nəticələr alınmasına baxmayaraq, sonlu oblastda onlar çox az tədqiq edilmişdir. Burada biz S.Q.Kreyn və Q.İ.Laptevin, S.S.Mirzəyevin, M.Y.Səlimovun və s. işlərini göstərə bilərik. Bu işlərdə baş hissədə, əsasən, öz-özünə qoşma operator iştirak edir.

Mexanikanın, xüsusi törəmali diferensial tənliklərin bir çox məsələləri baş hissədə normal operator olduqda operator-diferensial tənliklər üçün sonlu oblastda sərhəd məsələlərinin həll olunmasına

gətirilir. Bu məsələlərin həllində isə bir çox nəzəri və texniki çətinliklər meydana çıxır.

Təqdim olunan dissertasiya işində ikitərtibli, elliptik tip, baş hissəsində normal operator olan operator diferensial tənliklər üçün sonlu parçada sərhəd məsələlərinin həll olunması tədqiq olunur, uyğun operator dəstənin bəzi spektral xassələri öyrənilir. Bundan başqa bircins operator-diferensial tənliyin elementar həllər sisteminin həllər fəzasında tamlığı və minimallığı tədqiq edilir ki, bu da həllin Furiye metodu ilə tapılmasına imkan verir. Alınan nəticələr operator əmsalların xassələri ilə ifadə edilir və asanlıqla yoxlanıla bilər.

İşin məqsədi.

- 1⁰. İkitərtibli, elliptik tip, baş hissəsində normal operator olan operator-diferensial tənliklər üçün sonlu parçada bir sıra sərhəd məsələlərinin requlyar həll olunmasını təmin edən şərtlərin tapılması;
- 2⁰. Bəzi abstrakt Sobolev tipli fəzalarda aralıq törəmə operatorlarının normalalarının qiymətləndirilməsi və onların həll olma şərtləri ilə əlaqələndirilməsi;
- 3⁰. Uyğun operator dəstələrin rezolventasının və spektrinin xassələrinin tədqiq edilməsi;
- 4⁰. Operator dəstələrin sonlu parçadakı sərhəd məsələsinə uyğun məxsusi və qoşma elementlər sisteminin izlər fəzasında ikiqat tamlığını və minimallığını təmin edən şərtlərin tapılması;
- 5⁰. Requlyar həllər fəzasında bircins operator-diferensial tənliyin elementar həlləri sisteminin tamlığını və minimallığını təmin edən şərtlərin tapılması.

Tədqiqat işinin metodikası. Dissertasiyada Hilber fəzasında xətti operatorlar nəzəriyyəsinin, xətti məhdud operatorların yarımqrupları nəzəriyyəsinin, operator dəstələrin spektral nəzəriyyəsinin, kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinin və s. metodlarından istifadə edilmişdir.

Elmi yeniliklər:

1. Sonlu parçada ikitərtibli elliptik tip, baş hissədə normal operator olan operator-diferensial tənliklər üçün bir neçə sinif sərhəd məsələlərinin ikitərtibli requlyar həll olunmasını təmin edən və yalnız tənliyin operator əmsallarının xassələri ilə ifadə olunan şərtlər tapılmışdır;

2. Abstrakt Sobolev tipli bəzi fəzalarda aralıq törəmə operatorlarının normaları operator-diferensial tənliyin baş hissəsi vasitəsilə qiymətləndirilmiş, bu qiymətlərlə baxılan sərhəd məsələlərinin həll olunma şərtləri arasında əlaqə göstərilmişdir.
3. Uyğun operator dəstələrin rezolventasının və spektrinin xassələri tədqiq edilmişdir.
4. Requlyar həllərin izlər fəzasında operator-dəstələrin öyrənilən sərhəd məsələsinə uyğun məxsusi və qoşma elementlər sisteminin ikiqat tamlığını və ikiqat minimallığını təmin edən şərtlər tapılmışdır.
5. Bircins tənliyin requlyar həllər fəzasında onun elementar həllər sisteminin tamlığını və minimallığını təmin edən şərtlər alınmışdır.

Nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. İşdə alınan nəticələr, əsasən, nəzəri xarakter daşıyır. Lakin alınan nəticələr elliptik tip xüsusi törəməli tənliklər üçün qarışıq məsələlərin tədqiqində, mexanikanın və riyazi fizikanın bir çox məsələlərinin öyrənilməsində tətbiq edilə bilər.

İşin aprobasiyası. Dissertasiyanın əsas nəticələri Naxçıvan Dövlət Universitetinin «Riyazi analiz», Bakı Dövlət Universitetinin «Funksiyalar nəzəriyyəsi və funksional analiz», «Diferensial və integral tənliklər», «Tətbiqi riyaziyyat» kafedralarında, AMEA-nın Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun «Funksional analiz», «Qeyri harmonik analiz» şöbələrində, akademik İ.İ.İbrahimovun 100 illiyinə həsr olunmuş «Funksiyalar nəzəriyyəsi və harmonik analizin bəzi məsələləri» beynəlxalq konfransında (Bakı, 2012), H.Əliyevin anadan olmasının 90 illiyinə həsr olunmuş «Riyaziyyatın və informatikanın bəzi məsələləri» beynəlxalq konfransında (Bakı, 2013), akademik A.X.Mirzəcanzadənin 85 illik yubileyinə həsr olunmuş «Neft, qaz sahəsində qeyri-nyuton sistemlər» beynəlxalq konfransında (Bakı, 2013), «Regional inkişaf və böyük mədəniyyət: mənşə, harmoniya və tipologiya məsələləri» beynəlxalq konfransında (Naxçıvan, 1913) məruzə edilmişdir.

Çap olunmuş elmi əsərlər. Dissertasiyanın əsas nəticələri müəllifin 9 işində çap olunmuşdur. Bunların siyahısı avtoreferatın sonunda verilir.

İşin həcmi və tərkibi. Dissertasiya işi giriş, iki fəsil və ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Dissertasiyanın həcmi 120 səhifədən, ədəbiyyat siyahısı 77 adda ədəbiyyatdan ibarətdir.

İŞİN MƏZMUNU

Dissertasiyanın birinci fəsilə baş hissəsində normal iperator olan iki tərtibli elliptik tip operator-diferensial tənliklər üçün sonlu parçada sərhəd məsələlərinin həll olunma şərtləri tapılır.

1.1 yarım fəsilə bəzi anlayışlar verilir, funksional fəzalar daxil edilir və onların müəyyən xassələri göstərilir.

Tutaq ki, H serabel Hilbert fəzasıdır, A təyin oblastı $D(A)$ olan, tamam kəsilməz tərsə malik və spektri

$$S_\varepsilon = \{\lambda : |\operatorname{arg} \lambda| \leq \varepsilon\}, \quad 0 \leq \varepsilon < \pi/2$$

spektorunda yerləşən normal operatorudur.

Onda onu $A = UC$ şəklində göstərmək olar. Burada C öz-özüə qoşma müsbət müəyyən operator, U isə unitar operatorudur. $D(C^\gamma)$ xətti çoxluğunu $(x, y)_\gamma = (C^\gamma x, C^\gamma y)$ skalyar hasililə H_γ -Hilbert fəzasına çevirmək olar. $\gamma \geq 0$, $\gamma = 0$ olduqda $H_0 = H$ olduğunu qəbul edirik.

Tutaq ki, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. $L_2((a, b); H)$ ilə sanki hər yerdə (a, b) -də təyin olunmuş, qiymətləri isə H Hilbert fəzasından olan, kvadratı ilə integrallanan bütün $f(t)$ vektor-funksiyalarının Hilbert fəzasını işarə edək. Burada norma

$$\|f\|_{L_2((a, b); H)} = \left(\int_a^b \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2} < \infty$$

kimi təyin olunur. Daha sonra

$$W_2^2((a, b); H) = \{u'' \in L_2((a, b); H), \quad C^2 u \in L_2((a, b); H)\}$$

Hilbert fəzasını təyin edilir, ki burada norma

$$\|u\|_{W_2^2((a, b); H)} = \left(\|u''\|_{L_2((a, b); H)}^2 + \|C^2 u\|_{L_2((a, b); H)}^2 \right)^{1/2}.$$

Burada və bundan sonra törəmələr ümumiləşmiş funksiyaların törəməsi kimi başa düşülür.

$R = (-\infty, +\infty)$ ($a = -\infty, b = +\infty$) olduqda $L_2((-\infty, +\infty); H) = L_2(R; H)$, $W_2^2((-\infty, +\infty); H) = W_2^2(R; H)$, $R_+ = (0, +\infty)$ ($a = 0, b = +\infty$) olduqda isə $L_2((0, +\infty); H) = L_2(R_+; H)$, $W_2^2((0, +\infty); H) = W_2^2(R_+; H)$ kimi işarə edilir.

1.2 yarımfəsildə belə sərhəd məsələsinə baxılır:

$$P(d/dt)u(t) = -u''(t) + A^2u(t) + A_1u'(t) + A_2u(t) = f(t), t \in (0, T) \quad (1)$$

$$u(0) = \varphi_0, \quad u(T) = \varphi_1. \quad (2)$$

Burada $u(t), f(t)$ $(0, T)$ -də sanki hər yerdə təyin olunan qiymətləri isə H fəzasından olan vektor-funksiyalardır, $\varphi_0, \varphi_1 \in H$ vektorlardır, operator əmsalları isə aşağıdakı şərtləri ödəyir:

1) A - tamamilə kəsilməz tərsə malik, spektri

$$S_\varepsilon = \{\lambda : |\arg \lambda| \leq \varepsilon\}, \quad 0 \leq \varepsilon < \pi/2$$

sektorunda yerləşən operatorudur;

2) $B_1 = A_1A^{-1}$, $B_2 = A_2A^{-2}$ operatorları H -də məhduddur: $B_i \in L(H)$, $i = 1, 2$.

Tərif 1. $f(t) \in L_2((0, T); H)$ olduqda elə $u(t) \in W_2^2((0, T); H)$ varsa ki, o (1) tənliyini $(0, T)$ -də sanki hər yerdə ödəyir, onda $u(t)$ -yə (1) tənliyinin requlyar həlli deyilir.

Tərif 2. İstənilən $f(t) \in L_2((0, T); H)$ və $\varphi_0, \varphi_1 \in H_{3/2}$ üçün (1) tənliyinin $u(t)$ requlyar həlli varsa, o (2) sərhəd şərtini

$$\lim_{t \rightarrow +0} \|u(t) - \varphi_0\|_{3/2} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow T-0} \|u(t) - \varphi_1\|_{3/2} = 0$$

mənada ödəyirsə və

$$\|u\|_{W_2^2((0, T); H)} \leq \text{const} (\|f\|_{L_2((0, T); H)} + \|\varphi_0\|_{3/2} + \|\varphi_1\|_{3/2})$$

qiymətləndirilməsi doğrudursa, onda (1), (2) məsələsinə requlyar həll olunan deyilir.

Əvvəlcə belə bir lemma isbat edilir.

Lemma 1. Tutaq ki, $P_0(R)$ operatoru $W_2^2((0, T); H)$ fəzasında

$$P_0(d/dt)u = -u'' + A^2u$$

ifadəsi ilə təyin olunmuş operatorudur. Onda 1) şərti ödəndikdə $P_0(R)$ operatoru $W_2^2(R; H)$ fəzasından $L_2(R; H)$ fəzasına izomorf operatorudur.

Bundan sonra belə teoremlər isbat olunur.

Teorem 1. Tutaq ki, 1) şərti ödənilir. Onda

$$P_0(d/dt)u = -u''(t) + A^2u(t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (3)$$

$$u(0) = \varphi_0, \quad u(T) = \varphi_1 \quad (4)$$

məsələsə requlyar həll olunandır.

Teorem 2. Tutaq ki, 1) şərti ödənilir. Onda

$$P_0(d/dt)u = -u''(t) + A^2u(t) = f(t), \quad t \in (0, T), \quad (5)$$

$$u(0) = 0, \quad u(T) = 0 \quad (6)$$

sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır.

Daha sonra

$$W_2^2((0, T); H, 0, 0) = \{u \in W_2^2((0, T); H), u(0) = 0, u(T) = 0\}$$

fəzası daxil edilir və burada

$$P_0u = -u''(t) + A^2u(t), \quad u \in W_2^2((0, T); H : 0, 0)$$

operatoru təyin edilir. 2 teoreminə görə $P_0 \in W_2^2((0, T); H : 0, 0) \rightarrow L_2((0, T); H)$ inikası izomorfizimdir. (1), (2) məsələsinin requlyar həll olunma şərtlərini tapmaq üçün aşağıdakı aralıq törəmələrin normalarının qiymətləndirilməsi haqqında teorem isbat edilir.

Teorem 3. 1) şərti ödəndikdə istənilən $u \in W_2^2((0, T); H : 0, 0)$ üçün aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur:

$$\|A^{2-j}u^{(j)}\|_{L_2(0, T); H)} \leq c_j(\varepsilon) \|P_0u\|_{L_2(0, T); H)}, \quad j = 0, 1$$

burada

$$c_0(\varepsilon) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \varepsilon \leq \pi/4 \\ \frac{1}{\sin 2\varepsilon}, & \pi/4 \leq \varepsilon < \pi/2 \end{cases}$$

$$c_1(\varepsilon) = \frac{1}{2\cos 2\varepsilon}, \quad 0 \leq \varepsilon < \pi/2.$$

Bu teoremdən istifadə edərək aşağıdakı teorem isbat edilir.

Teorem 4. Tutaq ki, 1), 2) şərtlərini ödəyir və

$$q(\varepsilon) = c_1(\varepsilon)\|B_1\| + c_0(\varepsilon)\|B_2\| < 1$$

bərabərsizliyi doğrudur. Burada $c_1(\varepsilon)$ və $c_2(\varepsilon)$ ədədləri teorem 3-dən təyin olunur. Onda

$$P(d/dt)u(t) = -u'' + A^2u + A_1u' + A_2u = f(t), t \in (0, T) \quad (7)$$

$$u(0) = 0, u(T) = 0 \quad (8)$$

məsələsi requlyar həll olunandır.

Qeyd edək ki, bu hökm $A_1 = 0, A_2 = 0$, A isə müəyyən yarımqrup törədən operator olduqda S.Q.Kreyn və Q.İ.Laptev tərəfindən, A öz-özüne qoşma müsbət müəyyən operator olduqda isə S.S.Mirzəyev və M.Y.Səlimov tərəfindən alınmışdır.

Daha sonra (1)-(4) teoremlərindən istifadə edək yarım fəslin əsas teoremi isbat olunur.

Teorem 5. Tutaq ki, teorem 4-ün bütün şərtləri ödənilir. Onda (1), (2) məsələsi requlyar həll olunandır.

1.3 yarım fəsildə

$$P(d/dt)u(t) = -u''(t) + A^2u + A_1u' + A_2u = f(t), t \in (0, T) \quad (9)$$

$$u'(0) = 0, u'(T) = \varphi_1 \quad (10)$$

sərhəd məsələsinin requlyar həll olması tədqiq edilir.

Tərif 3. İstənilən $f \in L_2((0, T); H)$, $\varphi_0, \varphi_1 \in H_{1/2}$ üçün (9) tənliyinin elə $u(t)$ requlyar həlli varsa ki, o (10) sərhəd şərtini

$$\lim_{t \rightarrow +0} \|u'(t) - \varphi_0\|_{1/2} = 0, \lim_{t \rightarrow T-0} \|u'(t) - \varphi_1\| = 0$$

mənada ödəyirsə və

$$\|u\|_{W_2^2((0, T); H)} \leq \text{const} \left(\|f\|_{L_2((0, T); H)} + \|\varphi_0\|_{1/2} + \|\varphi_1\|_{1/2} \right)$$

qiymətləndirməsi doğrudursa, onda (9), (10) məsələsi requlyar həll olunan adlanır.

Bu məsələ üçün də 1, 2 teoremlərinin analoqları isbat edilir və aşağıdakı fəza daxil edilir

$$W_2^2((0, T); H : 1, 1) = \{u : u \in W_2^2((0, T); H), u'(0) = u'(T) = 0\}.$$

Bu fəzada aralıq törəmə operatorları üçün aşağıdakı teorem isbat olunur.

Teorem 6. Tutaq ki, 1) şərti ödəyir. Onda istənilən $u \in W_2^2((0, T); H : 1, 1)$ üçün aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur:

$$\left\| A^{2-j} u^{(j)} \right\|_{L_2((0,T);H)} \leq c_j(\varepsilon) \left\| P_0(d/dt)u \right\|_{L_2((0,T);H)}, \quad j = 0, 1,$$

Burada

$$c_0(\varepsilon) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \varepsilon \leq \pi/4 \\ \frac{1}{\sqrt{2} \cos \varepsilon}, & \pi/4 \leq \varepsilon < \pi/2, \end{cases} \quad (15)$$

$$c_1(\varepsilon) = \frac{1}{2 \cos \varepsilon}, \quad 0 \leq \varepsilon < \pi/2$$

Bu teoremdən istifadə edərək aşağıdakı teoremləri alırıq:

Teorem 7. Tutaq ki, 1), 2) şərtləri ödənilir və

$$q(\varepsilon) = c_1(\varepsilon) \|B_1\| + c_0(\varepsilon) \|B_2\| < 1$$

bərabərsizliyi doğrudur. Burada $c_0(\varepsilon)$ və $c_1(\varepsilon)$ (15) bərabərsizliklərindən təyin olunur. Onda (9) tənliyi üçün $u'(0) = u'(T) = 0$ sərhəd məsələsi rəqulyar həll olunandır.

Teorem 8. Tutaq ki, teorem 7-nin bütün şərtləri ödənilir. Onda (9), (10) məsələsi rəqulyar həll olunandır.

1.4 yarımfəsildə

$$P(d/dt)u(t) = -u''(t) + A^2u + A_1u' + A_2u = f(t), \quad t \in (0, T) \quad (16)$$

tənliyi üçün

$$u(0) = \varphi_0, \quad u'(T) = \varphi_1 \quad (17)$$

və

$$u'(0) = \varphi_0, \quad u(T) = \varphi_1 \quad (18)$$

sərhəd məsələləri tədqiq olunur.

Tərif 4. İstənilən $f \in L_2((0, T); H)$ və $\varphi_0 \in H_{3/2}, \varphi_1 \in H_{1/2}$ üçün (16) tənliyinin elə $u(t)$ rəqulyar həlli varsa ki, o (17) sərhəd şərtini

$$\lim_{t \rightarrow +0} \|u'(t) - \varphi_0\|_{3/2} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow T-0} \|u'(t) - \varphi_1\|_{1/2} = 0$$

mənada ödəyirsə və

$$\|u\|_{W_2((0,T);H)} \leq \text{const} \left(\|f\|_{L_2((0,T);H)} + \|\varphi_0\|_{3/2} + \|\varphi_1\|_{1/2} \right)$$

qiymətləndirilməsi doğrudursa, deyilir ki, (16), (17) məsələsi rəqulyar həll olunandır.

Analoji olaraq (16), (18) məsələsinin də requlyar həll olunmasının tərfi verilir.

Teorem 9. Tutaq ki, teorem 7-nin bütün şərtləri ödənilir. Onda (16),(17) ((16),(18)) məsələsi requlyar həll olunandır.

Qeyd edək ki, burada da $c_1(\varepsilon)$ və $c_2(\varepsilon)$ uyğun Sobolev tipli alt fəzalarda aralıq törəmələrin tənliyin baş hissə ilə qiymətləndirilməsindən alınan ədədlərdir.

1.5 yarımfəsildə isə

$$P(d/dt)u(t) = -u''(t) + A^2u + A_1u' + A_2u = f(t), t \in (0, T) \quad (19)$$

$$u(0) = e^{i\alpha}u(T), u'(0) = e^{i\alpha}u'(T), \alpha \in R \quad (20)$$

məsələsinin requlyar həll olunmasını təmin edən şərtlər tapılır.

Tərif 5. İstənilən $f \in L_2((0, T); H)$ üçün (19) tənliyinin elə $u(t)$ requlyar həlli varsa ki, o (20) sərhəd şərtlərini

$$\lim_{t \rightarrow +0} \|u(t) - e^{i\alpha}u(T-t)\|_{3/2} = 0, \lim_{t \rightarrow +0} \|u'(t) - e^{i\alpha}u'(T-t)\|_{1/2} = 0$$

mənasında ödəyirsə və

$$\|u\|_{W_2^2((0, T); H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2((0, T); H)}$$

qiymətləndirilməsi doğrudursa, (19), (20) məsələsi requlyar həll olunan adlanır.

Qeyd edək ki, $\alpha = 2\pi k, k = 0, 1, 2, \dots$ olduqda (19) tənliyi üçün

$$u(0) = u(T), u'(0) = u'(T)$$

periodik sərhəd məsələsi, $\alpha = \frac{\pi}{2}(2k+1), k = 0, 1, 2, \dots$ olduqda isə

$$u(0) = -u(T), u'(0) = -u'(T)$$

antiperiodik sərhəd məsələsi alınır.

Burada əvvəlcə isbat edilir ki, 1) şərti ödəndikdə

$$P(d/dt)u(t) = -u''(t) + A^2u = f(t), t \in (0, T) \quad (21)$$

$$u(0) = e^{i\alpha}u(T), u'(0) = e^{i\alpha}u'(T), \alpha \in R \quad (22)$$

sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır. Daha sonra isə (22) sərhəd şərtinə uyğun

$$W_2^2((0, T); H : \alpha) = \{u : u \in W_2^2((0, T); H), u(0) = e^{i\alpha}u(T),$$

$$u'(0) = e^{i\alpha}u'(T)\}$$

fəzasında aralıq törəmə operatorları üçün normalar qiymətləndirilir və göstərilir ki, istənilən $u \in W_2^2((0, T); H : \alpha)$ üçün

$$\|A^{2-j}u^{(j)}\|_{L_2((0, T); H)} \leq c_j(\varepsilon) \|P_0(d/dt)u\|_{L_2((0, T); H)}, \quad j = 0, 1$$

bərabərsizliyi doğrudur. burada $c_0(\varepsilon)$, $c_1(\varepsilon)$ ədədləri (15) bərabərsizlikləri ilə təyin olunur. Bu qiymətləndirmədən istifadə edərək aşağıdakı teorem isbat olunur.

Teorem 10. Tutaq ki, 1), 2) şərtləri ödənilir və

$$q(\varepsilon) = c_1(\varepsilon) \|B_1\| + c_0(\varepsilon) \|B_2\| < 1$$

bərabərsizliyi doğrudur. Burada $c_0(\varepsilon)$, $c_1(\varepsilon)$ ədədləri (15) bərabərsizlikləri ilə təyin olunur. Onda (19), (20) məsələsi rəqulyar həll olunandır.

Qeyd edək ki, bu teoremin şərti daxilində periodik və antiperiodik məsələlər də rəqulyar həll olunandır.

Dissertasiya işinin ikinci fəslə

$$P(\lambda) = -\lambda^2 E + \lambda A_1 + A_2 + A^2 \quad (23)$$

operator dəstəsinin sonlu parçadakı sərhəd məsələsinə uyğun məxsusi və qoşma elementlər sisteminin izlər fəzasında ikiqat tamlığı və minimallığı, həmçinin

$$P(d/dt)u(t) = -u''(t) + A^2u + A_1u' + A_2u = 0 \quad (24)$$

bircins tənliyinin elementar həllər sisteminin rəqulyar həllər fəzasında tamlığı və minimallığı tədqiq edilir.

2.1 yarımfəslində kvadratik operator dəstələrin spektral nəzəriyyəindən bəzi anlayışlar verilir və müəyyən hökmlər isbat olunur.

$\sigma_\infty(H)$ ilə H -də təsir edən tama kəsilməz operatorlar fəzası və

$$\sigma_p(H) = \left\{ K : K \in \sigma_\infty(H), \sum_{n=1}^{\infty} s_n^\rho(K) < \infty \right\} \quad \text{işarə edilir. Burada}$$

$s_n(K)$ ədədləri K -nin s -ədədləridir.

(23) operator dəstəsində λ spektral parametr, E -vahid operator əmsallar isə 1) və 2) şərtlərini ödəyir.

$\lambda \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ kompleks müstəvidir) nöqtəsində $P(\lambda)$ operatorunun tərsi $P^{-1}(\lambda)$ varsa, məhduddursa və bütün fəzada təyin olunursa

λ nöqtəsi $P(\lambda)$ -nin rezolvent nöqtəsi adlanır. Requlyar nöqtələr çoxluğu $\rho(P(\lambda))$ ilə işarə edilir. $P^{-1}(\lambda)$ operator-funksiyası $P(\lambda)$ -nin rezolventi adlanır. $\sigma(P(\lambda)) = \mathbb{C} \setminus \rho(P(\lambda))$ çoxluğu $P(\lambda)$ -nin spektri adlanır.

Tərif 6. Əgər $x_{i,j,0} \neq 0$, $x_{i,j,0} \in H_2$ vektoru $P(\lambda_i)x_{i,j,0} = 0$ tənliyini ödəyirsə, λ_i -yə $P(\lambda)$ -nin məxsusi ədədi, $x_{i,j,0}$ -a isə ona uyğun məxsusi elementi deyilir. $\{x_{i,j,0}, x_{i,j,1}, \dots, x_{i,j,m_{ij}}\} \subset H_2$ elementlər sistemi

$$\sum_{k=0}^h \frac{P^{(k)}(\lambda_i)}{k!} x_{i,j,h-k} = 0, \quad h = 0, \dots, m_{ij}, \quad (j = \overline{1, q_i})$$

tənliklərini ödəyirsə ona $x_{i,j,0}$ məxsusi elementinə qoşma sistem deyilir. $m_{ij} + 1$ ədədi bu sistemin uzunluğu, $\max_j(m_{ij+1})$ isə λ_i -nin təkrarlanma dərəcəsi adlanır.

Tutaq ki, $\{x_{i,j,h}\} \quad j = \overline{1, q_i}, \quad h = \overline{0, m_{ij}} \quad P(\lambda)$ operator dəstəsində λ_i -yə uyğun məxsusi və qoşma elementlər sistemidir. Onda

$$u_{i,j,h}(t) = e^{\lambda_i t} \left(\frac{t^h}{h!} x_{i,j,0} + \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} x_{i,j,1} + \dots + x_{i,j,h} \right), \quad h = \overline{0, m_{ij}}$$

vektor-funksiyaları (24) tənliyini ödəyir və onun elementar həlləri adlanır.

Əgər 1) və 2) şərtlərindən əlavə olaraq $E + B_2 = E + A_2 A^{-2}$ operatorunun bütün H -da təyin olunan məhdud tərsi varsa deyəcəyik ki, $P(\lambda) \in (K)$.

Bu yarım-fəsildə isbat olunur ki, $P(\lambda) \in (K)$ olduqda onun spektri diskret olub yalnız sonlu tərtibli məxsusi ədədlərdən ibarətdir, onların yeganə limit nöqtəsi sonsuzluqdur.

Daha sonra

$$P(d/dt)u(t) = -u''(t) + A^2 u + A_1 u' + A_2 u = 0, \quad t \in (0, T) \quad (25)$$

$$u(0) = \varphi_0, \quad u(T) = \varphi_1 \quad (26)$$

məsələsinə uyğun məxsusi və qoşma elementlərin törəmə sistemi qurulur. Bunlar elementar həllərin $t = 0$ və $t = T$ nöqtəsindən izləri kimi təyin olunur.

$$x_{i,j,h}^{(0)} = u_{i,j,h}(0), \quad x_{i,j,h}^{(0,T)} = u_{i,j,h}(T).$$

$H_{3/2} \times H_{3/2}$ fəzasında

$$K_0 = \{(x_{i,j,h}^{(0)}, x_{i,j,h}^{(0,T)})\}_{i=1, j=1, \overline{q_l}, h=0, \overline{m_{ij}}}^0$$

sisteminə baxılır.

Tərif 7. Əgər K_0 sistemi $H_{3/2} \times H_{3/2}$ fəzasında tamadırsa, deyəcəyik ki, K_0 sistemi $H_{3/2}$ -də ikiqat tamdır.

Analoji olaraq (25) tənliyi üçün $u'(0) = \varphi_0$, $u'(T) = \varphi_1$ sərhəd məsələsinə uyğun

$$K_1 = \{(x_{i,j,h}^{(1)}, x_{i,j,h}^{(1,T)})\}_{i=1, j=1, \overline{q_l}, h=0, \overline{m_{ij}}}^\infty$$

sistemi də daxil edilir. Burada $x_{i,j,h}^{(1)} = u'_{i,j,h}(0)$, $x_{i,j,h}^{(1,T)} = u'_{i,j,h}(T)$ elementar həllərin törəmələrinin izləridir.

Analoji olaraq K_1 sisteminin də $H_{1/2}$ -də ikiqat tamlığının tərfi verilir.

2.2 yarım fəsildə aşağıdakı teorem isbat olunur.

Teorem 11. Tutaq ki, 1), 2) şərtləri ödənilir və

$$q(\varepsilon) = c_1(\varepsilon)\|B_1\| + c_0(\varepsilon)\|B_2\| < 1$$

bərabərsizliyi doğrudur. Burada $c_0(\varepsilon), c_1(\varepsilon)$ ədədləri teorem 3-dən təyin olunur. Onda $P(\lambda)$ operator dəstəsinin xəyali ox üzərində spektri yoxdur və orada

$$\|\lambda^2 P_0^{-1}(\lambda)\| + \|\lambda A P_0^{-1}(\lambda)\| + \|A^2 P_0^{-1}(\lambda)\| \leq \text{const} \quad (27)$$

bərabərsizliyi ödənilir.

Sonra isə spektrin yerləşməsi haqqında aşağıdakı teorem isbat olunur.

Teorem 12. Tutaq ki, teorem 11-in şərtləri ödənilir. Onda $0 < \theta < \varepsilon_1$ və ε_1 kifayət qədər kiçik müsbət olduqda, $P(\lambda)$ -nin spektri $S_\theta = S'_\theta \cup S''_\theta$ oblastında yerləşir. Burada

$$S'_\theta = \left\{ \lambda : -\frac{\pi}{2} + \theta < \arg \lambda < \frac{\pi}{2} - \theta \right\}, \quad S''_\theta = \{ \lambda; -\lambda \in S'_\theta \}.$$

$\mathbb{C} \setminus S_\theta$ oblastında isə $P^{-1}(\lambda)$ var və orada (27) bərabərsizliyi doğrudur.

Bundan sonra $P^{-1}(\lambda)$ -nın aşağıdakı analitik xassəsi göstərilir.

Teorem 13. Tutaq ki, 11 teoremin şərtləri ödənilir və $A^{-1} \in \sigma_\rho(H)$ ($0 < \rho < \infty$). Onda $A^2 P^{-1}(\lambda)$ operator funksiyası $\frac{D(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ şəklində göstərilir, belə ki $\Delta(\lambda)$ ədədi qiymətli, $D(\lambda)$ isə operator qiymətli tam funksiyadır və istənilən $\delta > 0$ üçün

$$\|D(\lambda)\| \leq C_\delta e^{\delta|\lambda|}, |\Delta(\lambda)| \leq C'_\delta e^{\delta|\lambda|^\rho}, \quad C_\delta, C'_\delta > 0$$

bərabərsizlikləri doğrudur.

2.3 yarımfəsildə aşağıdakı əsas teorem isbat olunur.

Teorem 14. Tutaq ki, 11 teoreminin şərtləri və aşağıdakı iki şərt-dən biri ödənilir:

- 1) $A^{-1} \in \sigma_p(H)$ ($0 < p \leq 1$);
- 2) A operatorunun spektri koordinat başlanğıcından çıxan sonlu sayda şua üzərində yerləşir, $A^{-1} \in \sigma_p(H)$ ($0 < p < \infty$), $B_1, B_2 \in \sigma_\infty(H)$.

Onda 1) K_0 sistemi $H_{3/2}$ -də ikiqat təmizdir; 2) elementar həllər sistemi isə $P(d/dt)u = 0$ tənliyinin requlyar həllər fəzasında təmizdir.

Daha sonra 2.4 yarımfəsildə P.Laks mənada requlyar həllərin daxili kompaktlığı haqqında teorem isbat olunur. Bundan istifadə edərək aşağıdakı əsas teorem isbat olunur.

Teorem 15. Tutaq ki, 11 teoreminin şərtləri ödənilir. Onda K_0 sistemi $H_{3/2}$ fəzasında ikiqat minimal, elementar həllər sistemi isə $W_2^2((0, T) : H)$ -də minimaldır.

Burada $\{x_{i,j,h}\}_{i=1}^\infty \quad j = \overline{1, q_i}, \quad h = \overline{0, m_{ij}}$ sistemi kanonik sistem götürülür.

Qeyd edək ki, analogi teoremlər K_1 sistemi üçün də doğrudur, lakin burada $c_1(\varepsilon)$ və $c_2(\varepsilon)$ ədədləri (15) bərabərsizliklərindən təyin olunur.

Sonda elmi rəhbərin prof. S.S.Mirzəyevin məsələlərin qoyuluşu və dissertasiya işinə göstərdiyi diqqətə görə minnətdarlığımı bildirirəm.

Dissertasiya işinin əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə çap olunmuşdur.

1. Karaaslan M.D. Sonlu parçada bir sinif sərhəd məsələsi haqqında // Naxçıvan Dövlət Universitetinin elmi əsərləri, fiz.riyaziyyat, texniki elmləri seriyası, 2012, №1 (43), c.58-62.
2. Karaaslan M.D. Bir sinif kvadratik operator-dəstənin məxsusi və qoşma elementlərinin ikiqat təhlili haqqında / “Regional inkişaf və böyük mədəniyyət: mənşə, harmoniya və tipologiya məsələləri” beynəlxalq konfransı, 2013, s.6.
3. Карааслан М.Д. О разрешимости краевой задачи периодического типа для уравнения второго порядка с операторными коэффициентами // Известия Педагогического Университета, Раздел естест. наук, 2012, №3, с.15-19.
4. Мирзоев С.С., Карааслан М.Д. О корректной разрешимости одной краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка // Вестник Бакинского Государственного Университета, сер.физ.мат.наук, 2013, №1, с.5-9.
5. Мирзоев С.С., Карааслан М.Д., Гумбаталиев Р.З. К теории операторно-дифференциальных уравнений второго порядка // Докл. РАН, 2013, т.453, с.610-612.
6. Карааслан М.Д. О разрешимости одной краевой задачи для одного класса операторно-дифференциальных уравнений второго порядка // Материалы международной конференции по теории функций и проблемы гармонического анализа, посв. 100-летию юбилею акад.И.И.Ибрагимова, 2012, с.122-123.
7. Карааслан М.Д. Об одной периодической краевой задаче для дифференциальных уравнений второго порядка с операторными коэффициентами // Тезисы международной конференции, посв.90-летию со дня рождения Гейдара Алиева, 2013, с.158.
8. Карааслан М.Д. О двухкратной полноте некоторых систем // Материалы международной научной конференции, посв.85-летию юбилею академика Азада Халил оглы Мирзаджанзаде «Неньютоновские системы в нефтегазовой отрасли», 2013, с.133-134.

9. Karaaslan M.D. Regular solvability conditions of a boundary value problem for operator-differential equations in Hilbert space // Proceedings of IMM of NAS of Azerb., 2013, v.38, p.73-80.

МУХАММЕТ ДУРСУН ОГЛУ КАРААСЛАН

**РАЗРЕШИМОСТЬ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА И НЕКОТОРЫЕ
СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ**

АННОТАЦИЯ

Диссертационная работа посвящена исследованию корректной разрешимости некоторых краевых задач на конечном отрезке для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа в гильбертовом пространстве и некоторых спектральных задач.

В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

- Получены условия корректной разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа, главная часть которых содержит нормальный оператор.
- Получены оценки норм операторов промежуточных производных в некоторых подпространствах типа Соболева и указана их связь с условием разрешимости.
- Изучены аналитические свойства резольвенты операторного пучка, соответствующей операторно-дифференциальному уравнению.
- Получены условия о двукратной полноте и двукратной минимальности системы собственных и присоединенных векторов операторного пучка, отвечающих краевым условиям на конечном отрезке в пространстве следов регулярных решений.
- Получены условия о полноте к минимальности системы элементарных решений операторно-дифференциального уравнения в пространстве решений.

Все полученные результаты выражены свойствами коэффициентов операторно-дифференциального уравнения.

MUHAMMET DURSUN OGLU KARAASLAN

**SOLVABILITY OF THE SECOND ORDER OPERATOR-
DIFFERENTIAL EQUATION AND SOME SPEKTRAL
PROBLEMS**

SUMMARY

The thesis dedicated on the investigations to the well-posed solvability in the Hilbert space of the boundary value problems for a class of the second order elliptic type operator-differential equations in finite intervals and some their spectral problems.

The following main results are obtained in the dissertation work:

- The conditions are obtained a correctly solvability of boundary value problems in finite for the second order elliptic type operator-differential equation with normal operator at the high derivatives.
- The norms of the intermediate operator are estimated in the some Sobolev type subspace and their relation to the problem solvability of the conditions boundary value problems.
- The analitical properties of the rezolvent of the operator pencil corresponding to the operator-differential equation is stadied.
- Condition are found providing the double completeness and double minimality of the system eigen and adjoin elements of the operator pencils in the space of the traces of regular solutions corresponding to the boundary value problems in the finite intervals.
- The conditions are found for the completeness and minimalist of the system elementary solutions of the homogeneous operator-differential equation in the solutions space

All the results are expressed only by the properties of the coefficients of the operator-differential equation.

**НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

На правах рукописи

МУХАММЕТ ДУРСУН ОГЛЫ КАРААСЛАН

**РАЗРЕШИМОСТЬ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ВОТОРОГО ПОРЯДКА И НЕКОТОРЫЕ
СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ**

1202.01 – Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание учёной степени

доктора философии по математике

Баку – 2015