

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

На правах рукописи

МЕХРИБАН МАМЕД КЫЗЫ НАСИЯТИ

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В СТУПЕНЧАТЫХ
ДИСКРЕТНЫХ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ
УПРАВЛЕНИЯ

1203.01 – Компьютерные науки

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени доктора философии по
математике

Баку - 2015

Работа выполнена в лаборатории "Управление в сложных динамических системах" Института Систем Управления НАН Азербайджана.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Камиль Б. Мансимов.**

Официальные оппоненты:

- доктор математических наук, профессор **Р.К. Тагиев**
- кандидат физико-математических наук, доцент **А.Г. Агамалиев**

Ведущая организация:

**Сумгаитский Государственный Университет, кафедра
«Дифференциальные уравнения и оптимизация»**

Защита состоится « 19 » июня 2015 г. в 15⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета Д 01.121 при Институте Систем Управления Национальной Академии Наук Азербайджана по адресу: Az1141, г. Баку, ул. Б. Вагабзаде, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Института Систем Управления НАН Азербайджана.

Автореферат разослан « 18 » мая 2015 г.

**Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор философии по математике**

доц. А.Б. Пашаев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Дискретные динамические модели управляемых систем представляют собой важный как в теоретическом, так и в практическом отношении класс математических моделей, позволяющий охватить очень широкий круг реальных объектов.

Подобные модели возникают при моделировании многих реальных процессов с дискретным временем, а также при дискретизации непрерывных моделей для практических расчетов и построении различных вычислительных процедур.

Среди дискретных задач оптимального управления важное место занимают задачи оптимального управления, описываемые дискретными многомерными, и в частном случае, двухпараметрическими системами.

Дискретные двухпараметрические системы иногда называют также дискретными 2-D системами. В последние годы различные аспекты задач оптимального управления дискретными двухпараметрическими системами интенсивно изучается.

Заметим, что исторически задачи оптимального управления дискретными двухпараметрическими системами начали изучать с работ Т.С. Абдикеримова, Ф.М. Кирилловой и О.В. Васильева.

В дальнейшем появились работы С.Т. Алиевой, О.В. Васильева, И.В. Гайшуна, М.П. Дымкова, Т. Качзорека, В.Ф. Кротова, Э.Н. Махмудова, К.Б. Мансимова, А.И. Мехталиева, Р. Россера, М.А. Садыгова, Н.Н. Степанюка, Р.Г. Фараджева, Т. Форназини и др.

Дискретные многомерные, в частности двухпараметрические системы описывают многие реальные процессы. Ряд моделей обработки изображений в пространстве состояний описываются уравнениями представляющие собой разностный аналог системы гиперболических уравнений второго порядка с краевыми условиями Гурса-Дарбу. Такие модели называются системами Форназини-Маркезини.

В задачах возникающих при обработки изображений в пространстве состояний со стороны Аттази, Форназини и Маркезини были разработаны ряд математических моделей, которые также описывались подобными уравнениями.

Подобные модели используются также и при вероятностном описании изображений, в теории клеточных машин и др.

В последние годы интерес к исследованию различных задач оптимального управления, описываемых системами Форназини-Маркезини очень возрос.

В практике очень важно адекватное описание исследуемого процесса. Все это приводит также к необходимости изучения многоэтапных (ступенчатых, составных) процессов. Они очень широко распространены на практике. Такие процессы возникают в космонавтике, производстве, экономике, теории локомобионных систем и др. Например, конкретно межпланетный перелет, химико-технологический процесс, планирование развития экономической системы, динамика шагающего аппарата, рост и развитие растения и др. являются таковыми.

В работах Л.Т. Ащепкова, С.А. Багировой, А.И. Габелко, И.К. Гогодзе, Г.К. Захарова, С.Б. Кириченко, Ш.Ф. Магеррамова, К.Б. Мансимова, М.С. Никольского, Г.М. Островского и Ю.М. Волина, В.Н. Розовой, Т.А. Тадумадзе, Г.Л. Харатишвили и др. изучены качественные и конструктивные методы задач оптимального управления ступенчатыми системами, описываемых различными обыкновенными дифференциальными и разностными уравнениями, системами Гурса-Дарбу и др. Но ступенчатые задачи оптимального управления дискретными 2-D системами до сих пор не были изучены.

Настоящая работа посвящена изучению одного класса ступенчатых систем управления, описываемых разностными уравнениями типа Форназини-Маркезини.

Исходя из этого считаем, что тема диссертационной работы является актуальной.

Цель работы. Вывод необходимых условий оптимальности первого порядка в случае негладких и гладких функций качества, исследование особых (в том или ином смысле) режимов, установление необходимых условий оптимальности второго порядка в ступенчатых задачах управления дискретными двухпараметрическими системами.

Методы исследования. При выполнении работы использованы методы вариационного исчисления и оптимального управления, теории разностных уравнений.

Научная новизна. 1) Впервые исследованы ступенчатые задачи оптимального управления дискретными двухпараметрическими системами и негладким критерием качества.

2) Впервые в ступенчатых задачах управления дискретными двухпараметрическими системами выведены необходимые условия

оптимальности первого порядка и исследованы особые случаи с помощью специально построенных формул приращений второго порядка критерия качества.

Основные результаты диссертации выносимые на защиту:

- необходимые условия оптимальности первого порядка в терминах производных по направлениям в ступенчатой задаче оптимального управления дискретными двухпараметрическими системами;
- необходимые условия оптимальности типа дискретного принципа максимума, линеаризованного условия максимума, а также в виде аналога уравнения Эйлера;
- необходимые условия оптимальности особых управлений;
- необходимые условия оптимальности второго порядка в случае открытости области управления.

Личный вклад автора. Основные результаты, включенные в диссертационную работу, получены соискателем лично. В совместных работах с научным руководителем ему принадлежит постановка задач и обсуждения полученных результатов.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные в диссертации теоретические результаты представляют научный интерес в теории оптимального управления ступенчатыми системами. Они могут быть использованы при дальнейшей разработке теории необходимых условий оптимальности для различных ступенчатых задач управления.

Результаты работы могут найти также приложение в различных областях современной теории оптимального управления, а также при изучении конкретных задач оптимального управления.

Апробация работы. Основные результаты включенные в диссертационную работу докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- Семинары лаборатории "Управление в сложных динамических системах" Института Кибернетики НАН Азербайджана,
- Семинары кафедры "Математическая кибернетика" БГУ,
- Научная конференция аспирантов НАН Азербайджана,
- Республиканская научная конференция "Современные проблемы математики, информатики и экономики" посвященной 90 летию Бакинского Государственного Университета,

– The third international conference "Problems of cybernetics and informatics", Baku, 2010.

Результаты диссертации являются составной частью исследований, выполняемых в Институте Кибернетики НАН Азербайджана в рамках НИР.

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 14 работ, в которых отражено ее основное содержание. В работах [1-3, 6, 7, 9-11] научному руководителю К.Б. Мансимову принадлежит постановка задач и обсуждение полученных результатов.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы содержащее 125 наименований. Общий объем диссертации составляет 154 страниц машинописного текста.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, делается краткий обзор работ примыкающих к теме диссертации и кратко излагаются основные результаты диссертационной работы.

В первой главе работы состоящее из двух параграфов рассматривается одна составная задача оптимального управления дискретными двухпараметрическими системами с негладким функционалом качества.

Пусть требуется минимизировать функционал

$$S(u_1, u_2) = \Phi_1(z_1(t_1, X)) + \Phi_2(z_2(t_2, X)) \quad (1)$$

при ограничениях

$$u_i(t, x) \in U_i \subset R^r, \quad (t, x) \in D_i, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

$$(D_i = \{(t, x): t = t_{i-1}, t_{i-1} + 1, t_{i-1} + 2, \dots, t_i - 1, x = x_0, x_0 + 1, \dots, X - 1\}),$$

$$z_i(t + 1, x + 1) = f_i(t, x, z_i(t, x), z_i(t + 1, x), z_i(t, x + 1), u_i(t, x)), \quad (3)$$

$$(t, x) \in D_i = \{(t, x): t = t_{i-1}, t_{i-1} + 1, t_{i-1} + 2, \dots, t_i - 1, x = x_0, x_0 + 1, \dots, X - 1\},$$

$$z_1(t_0, x) = \alpha(x), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, X,$$

$$z_1(t, x_0) = \beta_1(t), \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1, \quad \alpha(x_0) = \beta_1(t_0), \quad (4)$$

$$z_2(t_1, x) = G(z(t_1, x)), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, X,$$

$$z_2(t, x_0) = \beta_2(t), \quad t = t_1, t_1 + 1, \dots, t_2, \quad G(z(t_1, x_0)) = \beta_2(t_1).$$

Здесь $f_i(t, x, z_i, a_i, b_i, u_i)$, $i = 1, 2$ – заданные соответственно n_i , $i = 1, 2$ мерные вектор-функции непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по (z_i, a_i, b_i) , $i = 1, 2$ соответственно, $\alpha(x)$, $\beta_i(t)$, $i = 1, 2$ – заданные дискретные вектор-функции соответствующих размерностей, $G(z)$ – заданная n_2 -мерная непрерывно дифференцируемая вектор-функция, U_i , $i = 1, 2$ – заданные непустые и ограниченные множества, $u_i(t, x)$, $i = 1, 2$ r_i -мерные, соответственно, вектор-функции управляющих воздействий, t_0 , t_1 , t_2 , x_0 , X – заданы, $\Phi_i(z_i)$, $i = 1, 2$ – заданные скалярные функции удовлетворяющие условию Липшица и имеющие производные по любому направлению.

Пару $u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x))$, удовлетворяющую вышеприведенным ограничениям, назовем допустимым управлением, решение $z(t, x) = (z_1(t, x), z_2(t, x))$ задачи (3)-(4) соответствующее этому допустимому управлению, допустимым состоянием, а соответствующий процесс $(u(t, x), z(t, x))$ – допустимым процессом.

Допустимое управление $u(t, x)$ доставляющий минимум функционалу (1) при ограничениях (2)-(4) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t, x), z(t, x))$ – оптимальным процессом.

Такие задачи оптимального управления называют многоэтапными, ступенчатыми или же составными задачами оптимального управления. Иногда их называют также задачами оптимального управления с переменной структурой.

Пусть $(u(t, x), z(t, x))$ – фиксированный допустимый процесс. Введем обозначения

$$\Delta_{v_i(t, x)} f_i[t, x] = f_i(t, x, z_i(t, x), z_i(t+1, x), z_i(t, x+1), v_i(t, x)) -$$

$$- f_i(t, x, z_i(t, x), z_i(t+1, x), z_i(t, x+1), u_i(t, x)),$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_i[t, x]}{\partial z_i} &= \frac{\partial f_i(t, x, z_i(t, x), z_i(t+1, x), z_i(t, x+1), u_i(t, x))}{\partial z_i}, \\
\frac{\partial f_i[t, x]}{\partial a_i} &= \frac{\partial f_i(t, x, z_i(t, x), z_i(t+1, x), z_i(t, x+1), u_i(t, x))}{\partial a_i}, \\
\frac{\partial f_i[t, x]}{\partial b_i} &= \frac{\partial f_i(t, x, z_i(t, x), z_i(t+1, x), z_i(t, x+1), u_i(t, x))}{\partial b_i}, \\
p_i(t, x) &= (z_i(t, x), z_i(t+1, x), z_i(t, x+1)).
\end{aligned}$$

Подобные обозначения будем и в дальнейшем, особо не отмечая, использовать.

Введем множества

$$f_i(t, x, p_i(t, x), U_i) = \{\gamma_i, \gamma_i = f_i(t, x, p_i(t, x), v_i), v_i \in U_i\}, i = 1, 2. \quad (5)$$

Через $y_i(t, x)$, $i = \overline{1, 2}$ обозначим решения задач

$$\begin{aligned}
y_i(t+1, x+1) &= \frac{\partial f_i[t, x]}{\partial z_i} y_i(t, x) + \frac{\partial f_i[t, x]}{\partial a_i} y_i(t+1, x) + \\
&+ \frac{\partial f_i[t, x]}{\partial b_i} y_i(t, x+1) + \Delta_{v_i(t, x)} f_i[t, x],
\end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
y_1(t_0, x) &= 0, \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, X, \quad y_1(t, x_0) = 0, \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1, \quad (7) \\
y_2(t_1, x) &= G_z(z(t_1, x)) y_1(t_1, x), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, X, \\
y_2(t, x_0) &= 0, \quad t = t_1, t_1 + 1, \dots, t_2.
\end{aligned}$$

Доказана

Теорема 1. Пусть множества (5) выпуклы, тогда для оптимальности допустимого управления $u(t, x)$ в задаче (1)-(4) необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial \Phi_i(z_i(t_i, X))}{\partial y_i(t_i, X)} \geq 0 \quad (8)$$

выполнялось для всех $v_i(t, x) \in U_i$, $(t, x) \in D_i$, $i = 1, 2$.

Неравенство (8) является общим необходимым условием оптимальности первого порядка. Далее конкретизирован полученный результат.

Пусть $(n_i \times n_i)$ -мерные матричные функции $R_i(t, x; \tau, s)$, $i = 1, 2$ являются соответственно решениями следующих задач:

$$\begin{aligned} R_i(t, x; \tau - 1, s - 1) = & R_i(t, x; \tau, s) \frac{\partial f_i[\tau, s]}{\partial z_i} + R_i(t, x; \tau - 1, s) \frac{\partial f_i[\tau - 1, s]}{\partial a_i} + \\ & + R_i(t, x; \tau, s - 1) \frac{\partial f_i[\tau, s - 1]}{\partial b_i}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (9)$$

$$R_i(t, x; \tau - 1, x - 1) = R_i(t, x; \tau, x - 1) \frac{\partial f_i[\tau, x - 1]}{\partial b_i}, \quad i = 1, 2,$$

$$R_i(t, x; t - 1, s - 1) = R_i(t, x; t - 1, s) \frac{\partial f_i[t - 1, s]}{\partial a_i}, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

$$R_i(t, x; t - 1, x - 1) = E_i, \quad i = 1, 2.$$

Здесь E_i , $i = 1, 2$ $(n_i \times n_i)$ – мерные единичные матрицы.

Положим

$$Q_1(t, x; \tau, s) = R_2(t, x; t_1 - 1, x - 1) \frac{\partial G(z_1(t_1, x))}{\partial z_1} R_1(t_1, x; \tau, s) + \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{\beta=s+1}^{x-1} \left[R_2(t, x; t_1 - 1, \beta - 1) - R_2(t, x; t_1 - 1, \beta) \frac{\partial f_2[t_1 - 1, \beta]}{\partial a_2} \right] \times \\ & \times \frac{\partial G(z_1(t_1, \beta))}{\partial z_1} R_1(t_1, \beta; \tau, s), \end{aligned}$$

$$\ell_1(v_1) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} R_1(t_1, X; t, x) A_{v_1(t, x)} f_1[t, x], \quad (12)$$

$$\ell_2(v_1) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} Q_1(t_2, X; t, x) \Delta_{v_1(t, x)} f_1[t, x], \quad (13)$$

$$\ell_3(v_2) = \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} R_2(t_2, X; t, x) \Delta_{v_2(t, x)} f_2[t, x]. \quad (14)$$

Теорема 2. Если множества (5) выпуклы, то для оптимальности допустимого управления $u(t, x)$ в задаче (1)-(4) необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$1) \quad \frac{\partial \Phi_1(z_1(t_1, X))}{\partial \ell_1(v_1)} + \frac{\partial \Phi_2(z_2(t_2, X))}{\partial \ell_2(v_1)} \geq 0, \quad v_1(t, x) \in U_1, \quad (t, x) \in D_1, \quad (15)$$

$$2) \quad \frac{\partial \Phi_2(z_2(t_2, X))}{\partial \ell_3(v_2)} \geq 0, \quad v_2(t, x) \in U_2, \quad (t, x) \in D_2. \quad (16)$$

Доказанная теорема также является достаточно общей теоремой.

Из него можно получить в частности аналог дискретного принципа максимума для рассматриваемой задачи.

Предположим, что в задаче (1)-(4) множества U_i , $i = 1, 2$ выпуклы, а вектор функции $f_i(t, x, z_i, a_i, b_i, u_i)$, $i = 1, 2$ непрерывно дифференцируемы по (z_i, a_i, b_i, u_i) , $i = 1, 2$ соответственно.

Через $q_i(t, x)$, $i = 1, 2$ обозначим решение краевой задачи

$$\begin{aligned} q_i(t+1, x+1) &= \frac{\partial f_i[t, x]}{\partial z_i} q_i(t, x) + \frac{\partial f_i[t, x]}{\partial a_i} q_i(t+1, x) + \\ &+ \frac{\partial f_i[t, x]}{\partial b_i} q_i(t, x+1) + \frac{\partial f_i[t, x]}{\partial u_i} (v_i(t, x) - u_i(t, x)), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (17)$$

$$q_1(t_0, x) = 0, \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, X, \quad q_1(t, x_0) = 0, \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1, \quad (18)$$

$$q_2(t_1, x) = G_z(z_1(t_1, x)) q_1(t_1, x), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, X,$$

$$q_2(t, x_0) = 0, \quad t = t_1, t_1 + 1, \dots, t_2.$$

Доказано, что вдоль оптимального управления $(u_1(t, x), u_2(t, x))$ выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial \Phi_i(z_i^0(t_i, X))}{\partial q_i(t_i, X)} \geq 0. \quad (19)$$

Неравенство (19) является неявным необходимым условием оптимальности первого порядка. Но при его помощи получены более легко проверяемые необходимые условия оптимальности первого порядка, в терминах производных по направлениям.

В §1.2 изучается один специальный класс задачи управления ступенчатыми системами.

Рассматривается задача о минимуме терминального функционала

$$S(u) = \sum_{i=1}^2 \Phi_i(z_i(t_i, X)), \quad (20)$$

при ограничениях

$$u_i(t, x) \in U_i \subset R^{r_i}, \quad (t, x) \in D_i, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} z_i(t+1, x+1) = & A_i(t, x)z_i(t, x) + B_i(t, x)z_i(t+1, x) + \\ & + C_i(t, x)z_i(t, x+1) + f_i(t, x, u_i(t, x)), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} z_1(t_0, x) = \alpha(x), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, X, \quad z_1(t, x_0) = \beta_1(t), \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1, \\ \alpha(x_0) = \beta_1(t_0), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} z_2(t_1, x) = G(x)z_1(t_1, x), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, X, \\ z_2(t, x_0) = \beta_2(t), \quad t = t_1, t_1 + 1, \dots, t_2, \quad \beta_2(t_1) = G(x_0)z_1(t_1, x_0). \end{aligned}$$

Здесь $A_i(t, x)$, $B_i(t, x)$, $C_i(t, x)$, $i = 1, 2$ – заданные $(n_i \times n_i)$, $i = 1, 2$ мерные матричные функции соответственно, $f_i(t, x, u_i)$, $i = 1, 2$ заданные n_i , $i = 1, 2$ мерные вектор-функции непрерывные по совокупности переменных, $G(x)$ – заданная дискретная матричная функция, а остальные данные задачи (20)-(23) удовлетворяют тем

условиям, которые приведены в §1.1. Как видно в отличие от §1.1 от функций $\Phi_i(z_i)$, $i=1,2$ не требуется удовлетворения условию Липшица.

Доказан аналог теоремы 2. Далее рассмотрен случай вырождения полученного необходимого условия оптимальности и установлены необходимые условия оптимальности второго порядка в терминах производных по направлениям.

В конце параграфа при предположении линейности также функционала качества доказано необходимое и достаточное условие оптимальности в форме дискретного условия максимума.

Вторая глава работы, состоящая из трех параграфов посвящен изучению одного класса ступенчатых задач управления, описываемых дискретными двухпараметрическими системами.

В §2.1 рассматривается следующая задача:

Допустим, что управляемый процесс описывается дискретной двухпараметрической системой уравнений

$$z_i(t+1, x+1) = f_i(t, x, z_i(t, x), z_i(t+1, x), z_i(t, x+1), u_i(t, x)), (t, x) \in D_i = \{(t, x): t = t_{i-1}, t_{i-1} + 1, \dots, t_i - 1, x = x_0, x_0 + 1, \dots, X - 1\}, i = \overline{1, 3} \quad (24)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} z_1(t_0, x) &= \alpha(x), x = x_0, x_0 + 1, \dots, X, z_1(t, x_0) = \beta_1(t), t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1, \\ z_2(t_1, x) &= z_1(t_1, x), x = x_0, x_0 + 1, \dots, X, z_2(t, x_0) = \beta_2(t), \\ t &= t_1, t_1 + 1, \dots, t_2, z_3(t_2, x) = z_2(t_2, x), x = x_0, x_0 + 1, \dots, X, \\ z_3(t, x_0) &= \beta_3(t), t = t_2, t_2 + 1, \dots, t_3, \\ \alpha(x_0) &= \beta_1(t_0), z_1(t_1, x_0) = \beta_2(t_1), z_2(t_2, x_0) = \beta_3(t_2). \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь $f_i(t, x, z_i, a_i, b_i, u_i)$, $i = \overline{1, 3}$ заданные n -мерные вектор-функции непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по (z_i, a_i, b_i) , $i = \overline{1, 3}$ до второго порядка включительно, $\alpha(x)$, $\beta_i(t)$, $i = \overline{1, 3}$ – заданные n -мерные дискретные вектор-функции, x_0 , t_i , $i = \overline{0, 3}$, X – заданы, а $u_i(t, x)$, $i = \overline{1, 3}$

r -мерные вектор-функции управляющих воздействий со значениями из заданных непустых и ограниченных множеств $U_i \subset R^r$, $i = \overline{1, 3}$, т.е.

$$u_i(t, x) \in U_i \subset R^r, \quad (t, x) \in D_i, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (26)$$

Тройку $u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x))'$ с вышеприведенными свойствами будем называть допустимым управлением, соответствующее ему решение $z(t, x) = (z_1(t, x), z_2(t, x), z_3(t, x))'$ краевой задачи (24)-(25) допустимым состоянием процесса, пару $(u(t, x), z(t, x))$ будем называть допустимым процессом.

Задача заключается в минимизации функционала

$$S(u) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(z_i(t_i, X)), \quad (27)$$

при ограничениях (24)-(26).

Здесь $\varphi_i(z_i)$, $i = \overline{1, 3}$ заданные, дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции.

Пусть $(u(t, x), z(t, x))$ фиксированный допустимый процесс.

Введем функции Гамильтона-Понтрягина

$$H_i(t, x, z_i, a_i, b_i, u_i, \psi_i) = \psi_i' f_i(t, x, z_i, a_i, b_i, u_i), \quad i = \overline{1, 3},$$

где $\psi_i = \psi_i(t, x)$, $i = \overline{1, 3}$ n -мерные вектор-функции, которые являются решениями следующей задачи

$$\psi_i(t-1, x-1) = \frac{\partial H_i[t, x]}{\partial z_i} + \frac{\partial H_i[t-1, x]}{\partial a_i} + \frac{\partial H_i[t, x-1]}{\partial b_i}, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (28)$$

$$\psi_1(t_1-1, X-1) = \psi_2(t_1-1, X-1) - \frac{\partial \varphi_1(z_1(t_1, X))}{\partial z_1}, \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
\psi_1(t_1-1, x-1) &= \psi_2(t_1-1, x-1) + \frac{\partial H_1[t_1-1, x]}{\partial a_1} - \frac{\partial H_2[t_1-1, x]}{\partial a_2}, \\
\psi_1(t-1, X-1) &= \frac{\partial H_1[t, X-1]}{\partial b_1}, \\
\psi_2(t_2-1, X-1) &= \psi_3(t_2-1, X-1) - \frac{\partial \varphi_2(z_2(t_2, X))}{\partial z_2}, \\
\psi_2(t_2-1, x-1) &= \psi_3(t_2-1, x-1) + \frac{\partial H_2[t_2-1, x]}{\partial a_2} - \frac{\partial H_3[t_2-1, x]}{\partial a_3}, \\
\psi_2(t-1, X-1) &= \frac{\partial H_2[t, X-1]}{\partial b_2}, \quad \psi_3(t_3-1, X-1) = -\frac{\partial \varphi_3(z_3(t_3, X))}{\partial z_3}, \\
\psi_3(t_3-1, x-1) &= \frac{\partial H_3[t_3-1, x]}{\partial a_3}, \quad \psi_3(t-1, X-1) = \frac{\partial H_3[t, X-1]}{\partial b_3}.
\end{aligned}$$

Введем множества

$$f_i(t, x, p_i(t, x), U_i) = \{\gamma_i : \gamma_i = f_i(t, x, p_i(t, x), v_i), v_i \in U\}, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (30)$$

Теорема 3. (Дискретный аналог принципа максимума Понтрягина) Если множества (30) выпуклы, то для оптимальности допустимого управления $u(t, x)$ в задаче (24)-(27) необходимо, чтобы соотношения

$$\sum_{t=t_{i-1}}^{t_i-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \Delta_{v_i(t, x)} H_i[t, x] \leq 0, \quad (31)$$

выполнялись соответственно для всех $v_i(t, x) \in U_i$, $(t, x) \in D_i$, $i = \overline{1, 3}$.

Соотношения (31) представляют собой необходимое условие оптимальности первого порядка, типа дискретного принципа максимума Понтрягина.

Но нередки случаи, когда для различных задач оптимального управления принцип максимума Понтрягина, или же его аналоги

вырождаются. В этом случае надо иметь новые необходимые условия оптимальности.

Определение 1. Если в задаче (24)-(27) для всех $v_i(t, x) \in U_i$, $(t, x) \in D_i$, $i = \overline{1, 3}$,

$$\sum_{t=t_{i-1}}^{t_i-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \Delta_{v_i(t, x)} H_i[t, x] = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (32)$$

то допустимое управление $u(t, x)$ назовем особым, в смысле принципа максимума Понтрягина, управлением.

Пусть $y_i(t, x)$, $i = \overline{1, 3}$ являются решениями задач:

$$\begin{aligned} y_i(t+1, x+1) = & \frac{\partial f_i[t, x]}{\partial z_i} y_i(t, x) + \frac{\partial f_i[t, x]}{\partial a_i} y_i(t+1, x) + \\ & + \frac{\partial f_i[t, x]}{\partial b_i} y_i(t, x+1) + \Delta_{v_i(t, x)} f_i[t, x], \quad i = \overline{1, 3}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} y_1(t_0, x) = 0, \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, X, \quad y_1(t, x_0) = 0, \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1, \\ y_2(t_1, x) = y_1(t_1, x), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, X, \quad y_2(t, x_0) = 0, \quad t = t_1, t_1 + 1, \dots, t_2, \\ y_3(t_2, x) = y_2(t_2, x), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, X, \\ y_3(t, x_0) = 0, \quad t = t_2, t_2 + 1, \dots, t_3. \end{aligned} \quad (34)$$

Теорема 4. Пусть множества (30) выпуклы. Тогда для оптимальности особого в смысле принципа максимума Понтрягина, управления $u(t, x)$ в задаче (24)-(27) необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sum_{i=1}^3 \sum_{t=t_{i-1}}^{t_i-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \left[y'_i(t, x) \frac{\partial^2 H_i[t, x]}{\partial z_i^2} y_i(t, x) + \right. \\ & + y'_i(t, x) \frac{\partial^2 H_i[t, x]}{\partial z_i \partial a_i} y_i(t+1, x) + y'_i(t+1, x) \frac{\partial^2 H_i[t, x]}{\partial a_i \partial z_i} y_i(t, x) + \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
& + y'_i(t+1, x) \frac{\partial^2 H_i[t, x]}{\partial a_i^2} y_i(t+1, x) + y'_i(t, x) \frac{\partial^2 H_i[t, x]}{\partial z_i \partial b_i} y_i(t, x+1) + \\
& + y'_i(t, x+1) \frac{\partial^2 H_i[t, x]}{\partial b_i \partial z_i} y_i(t, x) + y'_i(t, x+1) \frac{\partial^2 H_i[t, x]}{\partial b_i^2} y_i(t, x+1) + \\
& + y'_i(t+1, x) \frac{\partial^2 H_i[t, x]}{\partial a_i \partial b_i} y_i(t, x+1) + y'_i(t, x+1) \frac{\partial^2 H_i[t, x]}{\partial b_i \partial a_i} y_i(t+1, x) \Big] + \\
& + 2 \frac{\partial \Delta_{v_1(t, x)} H_1[t, x]}{\partial z_1} y_1(t, x) + 2 \frac{\partial \Delta_{v_1(t, x)} H_1[t, x]}{\partial a_1} y_1(t+1, x) + \\
& + 2 \frac{\partial \Delta_{v_1(t, x)} H_1[t, x]}{\partial b_1} y_1(t, x+1) - \sum_{i=1}^3 y'_i(t_i, X) \frac{\partial^2 \varphi_i(z_i(t_i, X))}{\partial z_i^2} y_i(t_i, X) \leq 0
\end{aligned}$$

для всех $v_1(t, x) \in U_1$, $(t, x) \in D_1$;

$$\begin{aligned}
2) \quad & \sum_{i=2}^3 \sum_{t=t_{i-1}}^{t_i-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \Big[y'_i(t, x) \frac{\partial^2 H_i[t, x]}{\partial z_i^2} y_i(t, x) + y'_i(t, x) \frac{\partial^2 H_i[t, x]}{\partial z_i \partial a_i} y_i(t+1, x) + \\
& + y'_i(t+1, x) \frac{\partial^2 H_i[t, x]}{\partial a_i \partial z_i} y_i(t, x) + y'_i(t+1, x) \frac{\partial^2 H_i[t, x]}{\partial a_i^2} y_i(t+1, x) + (36) \\
& y'_i(t, x) \frac{\partial^2 H_i[t, x]}{\partial z_i \partial b_i} y_i(t, x+1) + y'_i(t, x+1) \frac{\partial^2 H_i[t, x]}{\partial b_i \partial z_i} y_i(t+1, x) + \\
& + y'_i(t, x+1) \frac{\partial^2 H_i[t, x]}{\partial b_i^2} y_i(t, x+1) + y'_i(t, x+1) \frac{\partial^2 H_i[t, x]}{\partial a_i \partial b_i} y_i(t, x+1) + \\
& + y'_i(t, x+1) \frac{\partial^2 H_i[t, x]}{\partial b_i \partial a_i} y_i(t+1, x) \Big] + 2 \frac{\partial \Delta_{v_2(t, x)} H_2[t, x]}{\partial z_2} y_2(t, x) + \\
& + 2 \frac{\partial \Delta_{v_2(t, x)} H_2[t, x]}{\partial a_2} y_2(t+1, x) + 2 \frac{\partial \Delta_{v_2(t, x)} H_2[t, x]}{\partial b_2} \times \\
& \times y_2(t, x+1) - \sum_{i=1}^3 y'_i(t_i, X) \frac{\partial^2 \varphi_i(z_i(t_i, X))}{\partial z_i^2} y_i(t_i, X) \leq 0
\end{aligned}$$

для всех $v_2(t, x) \in U_2$, $(t, x) \in D_2$;

$$\begin{aligned}
 3) \sum_{t=t_2}^{t_3-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} & \left[y'_3(t, x) \frac{\partial^2 H_3[t, x]}{\partial z_3^2} y_3(t, x) + y'_3(t, x) \frac{\partial^2 H_3[t, x]}{\partial z_3 \partial a_3} y_3(t+1, x) + \right. \\
 & + y'_3(t+1, x) \frac{\partial^2 H_3[t, x]}{\partial a_3 \partial z_3} y_3(t, x) + y'_3(t+1, x) \frac{\partial^2 H_3[t, x]}{\partial a_3^2} y_3(t+1, x) + \\
 & + y'_3(t, x) \frac{\partial^2 H_3[t, x]}{\partial z_3 \partial b_3} y_3(t, x+1) + y'_3(t, x+1) \frac{\partial^2 H_3[t, x]}{\partial b_3 \partial z_3} y_3(t, x) + \\
 & + y'_3(t, x+1) \frac{\partial^2 H_3[t, x]}{\partial b_3^2} y_3(t, x+1) + y'_3(t+1, x) \frac{\partial^2 H_3[t, x]}{\partial a_3 \partial b_3} \times \\
 & \times y_3(t, x+1) + y'_3(t, x+1) \frac{\partial^2 H_3[t, x]}{\partial b_3 \partial a_3} y_3(t+1, x) \left. \right] + 2 \frac{\partial \Delta_{v_3(t, x)} H_3[t, x]}{\partial z_3} \times \\
 & \times y_3(t, x) + 2 \frac{\partial \Delta_{v_3(t, x)} H_3[t, x]}{\partial a_3} y_3(t+1, x) + 2 \frac{\partial \Delta_{v_3(t, x)} H_3[t, x]}{\partial b_3} \times \\
 & \times y_3(t, x+1) - y'_3(t_3, X) \frac{\partial^2 \varphi_3(z_3(t_3, X))}{\partial z_3^2} y_3(t_3, X) \leq 0
 \end{aligned} \quad (37)$$

для всех $v_3(t, x) \in U_3$, $(t, x) \in D_3$.

Соотношения (35)-(37) являются довольно общими необходимыми условиями оптимальности особых, в смысле принципа максимума Понтрягина управлений, и носят промежуточный характер. Далее используя их при некоторых дополнительных предположениях получены необходимые условия оптимальности, выраженные через параметры задачи.

Пусть по определению

$$\begin{aligned}
 Q_1(t, x; \tau, s) &= R_2(t, x; t_1 - 1, x - 1) R_1(t_1, x; \tau, s) + \\
 &+ \sum_{\beta=s+1}^{x-1} \left[R_2(t, x; t_1 - 1, \beta - 1) - R_2(t, x; t_1 - 1, \beta) \right] \frac{\partial f_2[t_1 - 1, \beta]}{\partial a_2} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times R_1(t_1, \beta; \tau, s), \\
Q_2(t, x; \tau, s) &= R_3(t, x; t_2 - 1, x - 1) Q_1(t_2, x; \tau, s) + \\
& + \sum_{\beta=s+1}^{x-1} \left[R_3(t, x; t_2 - 1, \beta - 1) - R_3(t, x; t_2 - 1, \beta) \frac{\partial f_3[t_2 - 1, \beta]}{\partial a_3} \right] \times \\
& \times Q_1(t_2, \beta; \tau, s), \\
Q_3(t, x; \tau, s) &= R_3(t, x; t_2 - 1, x - 1) R_2(t_2, x; \tau, s) + \\
& + \sum_{\beta=s+1}^{x-1} (R_3(t, x; t_2 - 1, \beta - 1) - R_3(t, x; t_2 - 1, \beta)) \frac{\partial f_3[t_2 - 1, \beta]}{\partial a_3} \times \\
& \times R_2(t_2, \beta; \tau, s).
\end{aligned}$$

Предположим, что правые части системы (24) имеют вид:

$$f_i(t, x, z_i, a_i, b_i, u_i) = B_i(t, x) b_i + F_i(t, x, z_i, a_i, u_i), \quad i = \overline{1, 3}. \quad (38)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
K_1(\tau, s) &= -R_1'(t_1, X; \theta, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_1(z_1(t_1, X))}{\partial z_1^2} R_1(t_1, X; \theta, s) - \\
& - Q_1'(t_2, X; \theta, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_2(z_2(t_2, X))}{\partial z_2^2} Q_2(t_2, X; \theta, s) - \\
& - Q_3'(t_3, X; \theta, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_3(z_3(t_3, X))}{\partial z_3^2} Q_3(t_3, X; \theta, s) + \\
& + \sum_{t=t_1}^{t_1-1} \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{X-1} \left[R_1'(t, x, \theta, \tau) \frac{\partial^2 H_1[t, x]}{\partial z_1^2} R_1(t, x, \theta, s) + R_1'(t, x, \theta, \tau) \times \right. \\
& \times \left. \frac{\partial^2 H_1[t, x]}{\partial z_1 \partial a_1} R_1(t+1, x, \theta, s) + R_1'(t+1, x, \theta, \tau) \frac{\partial^2 H_1[t, x]}{\partial a_1 \partial z_1} R_1(t, x, \theta, s) \right] +
\end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{t=1 \\ \neq \theta}}^{t_1-1} \sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1} R'_1(t+1, x, \theta, \tau) \frac{\partial^2 H_1[t, x]}{\partial a_1^2} R_1(t+1, x, \theta, s) + \\
& + \sum_{\substack{t=1 \\ \neq t_1}}^{t_2-1} \sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1} \left[Q'_1(t, x, \theta, \tau) \frac{\partial^2 H_2[t, x]}{\partial z_2^2} Q_1(t, x, \theta, s) + Q'_1(t, x, \theta, \tau) \times \right. \\
& \times \frac{\partial^2 H_2[t, x]}{\partial z_2 \partial a_2} Q_1(t+1, x, \theta, s) + Q'_1(t+1, x, \theta, \tau) \frac{\partial^2 H_2[t, x]}{\partial a_2 \partial z_2} Q_1(t, x, \theta, s) + \\
& \left. + Q'_1(t+1, x, \theta, \tau) \frac{\partial^2 H_2[t, x]}{\partial a_2^2} Q_1(t+1, x, \theta, s) \right] + \\
& + \sum_{\substack{t=1 \\ \neq t_2}}^{t_3-1} \sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1} \left[Q'_2(t, x, \theta, \tau) \frac{\partial^2 H_3[t, x]}{\partial z_3^2} Q_2(t, x, \theta, s) + \right. \\
& + Q'_2(t, x, \theta, \tau) \frac{\partial^2 H_3[t, x]}{\partial z_3 \partial a_3} Q_2(t+1, x, \theta, s) + Q'_2(t+1, x, \theta, \tau) \frac{\partial^2 H_3[t, x]}{\partial a_3 \partial z_3} \times \\
& \times Q_2(t, x, \theta, s) + Q'_2(t+1, x, \theta, \tau) \frac{\partial^2 H_3[t, x]}{\partial a_3^2} Q_2(t+1, x, \theta, s) \left. \right], \\
& K_2(\tau, s) = -R'_2(t_2, X; \theta, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_2(z_2(t_2, X))}{\partial z_2^2} R_2(t_2, X; \theta, s) - \\
& - Q'_3(t_3, X; \theta, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_3(z_3(t_3, X))}{\partial z_3^2} Q_3(t_3, X; \theta, s) + \\
& + \sum_{\substack{t=1 \\ \neq \theta+1}}^{t_2-1} \sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1} \left[R'_2(t, x, \theta, \tau) \frac{\partial^2 H_2[t, x]}{\partial z_2^2} R_2(t, x, \theta, s) + R'_2(t, x, \theta, \tau) \times \right. \\
& \times \frac{\partial^2 H_2[t, x]}{\partial z_2 \partial a_2} R_2(t+1, x, \theta, s) + R'_2(t+1, x, \theta, \tau) \frac{\partial^2 H_2[t, x]}{\partial a_2 \partial z_2} R_2(t, x, \theta, s) \left. \right] + \\
& + \sum_{\substack{t=1 \\ \neq \theta}}^{t_1-1} \sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1} R'_2(t+1, x; \theta, \tau) \frac{\partial^2 H_2[t, x]}{\partial a_2^2} R_2(t+1, x; \theta, s) + \quad (40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{t=t_2}^{t_3-1} \sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1} \left[Q'_3(t, x; \theta, \tau) \frac{\partial^2 H_3[t, x]}{\partial z_3^2} Q_3(t, x; \theta, s) + Q'_3(t, x; \theta, \tau) \times \right. \\
& \times \frac{\partial^2 H_3[t, x]}{\partial z_3 \partial a_3} Q_3(t+1, x; \theta, s) + Q'_3(t+1, x; \theta, \tau) \frac{\partial^2 H_3[t, x]}{\partial a_3 \partial z_3} Q_3(t, x; \theta, s) + \\
& \left. + Q'_3(t+1, x; \theta, \tau) \frac{\partial^2 H_3[t, x]}{\partial a_3^2} Q_3(t+1, x; \theta, s) \right], \\
& K_3(\tau, s) = -R'_3(t_3, X; \theta, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_3(z_3(t_3, X))}{\partial z_3^2} R_3(t_3, X; \theta, s) + \\
& + \sum_{t=\theta+1}^{t_3-1} \sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1} \left[R'_3(t, x; \theta, \tau) \frac{\partial^2 H_3[t, x]}{\partial z_3^2} R_3(t, x; \theta, s) + R'_3(t, x; \theta, \tau) \times \right. \\
& \times \frac{\partial^2 H_3[t, x]}{\partial z_3 \partial a_3} R_3(t+1, x; \theta, s) + R'_3(t+1, x; \theta, \tau) \frac{\partial^2 H_3[t, x]}{\partial a_3 \partial z_3} R_3(t, x; \theta, s) \left. \right] + \\
& + \sum_{t=\theta}^{t_3-1} \sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{X-1} R'_3(t+1, x; \theta, \tau) \frac{\partial^2 H_3[t, x]}{\partial a_3^2} R_3(t+1, x; \theta, s). \quad (41)
\end{aligned}$$

Введем множества

$$\begin{aligned}
& F_i(t, x, z_i(t, x), z_i(t+1, x), U_i) = \\
& = \{ \alpha_i : \alpha_i = F_i(t, x, z_i(t, x), z_i(t+1, x), v_i), \quad v_i \in U_i \}, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (42)
\end{aligned}$$

Теорема 5. Если множества (42) выпуклы, то для оптимальности особого в смысле принципа максимума Понтрягина, управления $u(t, x)$ в задаче (24)-(27), (38) необходимо, чтобы для всех $v_i(x) \in U_i$, $i = \overline{1, 3}$, $x = x_0, \dots, X-1$ выполнялись соответственно неравенства

$$\sum_{\tau=x_0}^{X-1} \sum_{s=x_0}^{X-1} \Delta_{v_1(\tau)} f_1[\theta, \tau] K_1(\tau, s) \Delta_{v_1(s)} f_1[\theta, s] +$$

$$+ 2 \sum_{x=x_0}^{X-1} \left[\sum_{s=x_0}^{X-1} \frac{\partial \Delta_{v_1(x)} H_1[t, x]}{\partial a_1} R_1(t, x; \tau, s) \Delta_{v_1(s)} f_1[\theta, s] \right] \leq 0, \quad (43)$$

$$\sum_{\tau=x_0}^{X-1} \sum_{s=x_0}^{X-1} \Delta_{v_2(\tau)} f_2'[\theta, \tau] K_2(\tau, s) \Delta_{v_2(s)} f_2[\theta, s] + 2 \sum_{x=x_0}^{X-1} \left[\sum_{s=x_0}^{X-1} \left[\frac{\partial \Delta_{v_2(x)} H_2[t, x]}{\partial z_2} \times \right. \right.$$

Ошибка! Ошибка связи., (44)

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau=x_0}^{X-1} \sum_{s=x_0}^{X-1} \Delta_{v_3(\tau)} f_3'[\theta, \tau] K_3(\tau, s) \Delta_{v_3(s)} f_3[\theta, s] + \\ & + 2 \sum_{x=x_0}^{X-1} \left[\sum_{s=x_0}^{X-1} \left[\frac{\partial \Delta_{v_3(x)} H_3[t, x]}{\partial z_3} R_3(\theta, x; \theta, s) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial \Delta_{v_3(x)} H_3[\theta, x]}{\partial a_3} R_2(\theta + 1, x; \theta, s) \right] \Delta_{v_3(s)} f_2[\theta, s] \right] \leq 0. \quad (45) \end{aligned}$$

Полученные неравенства в отличие от (35)-(37), непосредственно выражены через параметры задачи (24)-(27), (38).

Затем изучен случай линейности функций $f_i(t, x, z_i, a_i, b_i, u_i)$, $i = \overline{1, 3}$ по a_i , $i = \overline{1, 3}$. Установлен аналог теоремы 5.

Далее рассмотрен случай, когда правые части систем (24) имеют вид

$$f_i(t, x, z_i, a_i, b_i, u_i) = A_i(t, x) a_i + B_i(t, x) b_i + F_i(t, x, z_i, u_i), \quad i = \overline{1, 3}.$$

Получены результаты, не вытекающие из результатов общего случая и учитывающие специфические особенности рассматриваемой задачи.

Во втором параграфе второй главы продолжается изучение задачи (24)-(27) при некоторых дополнительных предположениях.

Пусть в задаче (24)-(27) множества U_i , $i = \overline{1, 3}$ выпуклы, а $f_i(t, x, z_i, a_i, b_i)$, $i = \overline{1, 3}$ непрерывны по совокупности переменных вместе с частными производными по (z_i, a_i, b_i, u_i) , $i = \overline{1, 3}$ до второго порядка включительно.

При этих предположениях сначала доказан аналог линеаризованного условия максимума, а затем изучен случай его вырождения (квазиособый случай).

Получены необходимые условия оптимальности квазиособых управлений непосредственно выраженные через параметры рассматриваемой задачи. Рассмотрены частные случаи позволяющие получить результаты, не вытекающие из общего.

В третьем параграфе второй главы изучен случай открытых областей управления.

Получен аналог уравнения Эйлера. Из условия неотрицательности второй вариации функционала качества выведены необходимые условия оптимальности второго порядка. В частном случае получены результаты, имеющие специфические особенности и не вытекающие из общего результата.

В заключение, пользуясь случаем, выражаю благодарность научному руководителю проф. К.Б. Мансимову за постановку задачи, полезные советы и обсуждение полученных результатов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации рассмотрены ступенчатые задачи оптимального управления, описываемые системами разностных уравнений типа Форназини-Маркезини. При помощи модификации метода приращений получены различные необходимые условия оптимальности первого порядка, исследованы особые случаи и выведены необходимые условия оптимальности второго порядка.

Основные научные результаты, выносимые на защиту следующие:

- Необходимые условия оптимальности в форме дискретного принципа максимума и в терминах производных по направлениям;
- Необходимые условия оптимальности в форме линеаризованного условия максимума и уравнения Эйлера;
- Необходимые условия оптимальности особых, в смысле принципа максимума Понтрягина управлений;
- Необходимые условия оптимальности квазиособых управлений;
- Необходимые условия оптимальности второго порядка.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Мансимов К.Б., Насияти М.М. Аналог дискретного принципа максимума Понтрягина в одной ступенчатой задаче управления дискретными двухпараметрическими системами // Изв. НАНА. Сер. физ.-техн. и мат. наук, т. XXIX, № 6, 2009, с. 42-49.

2. Мансимов К.Б., Насияти М.М. Необходимое условие оптимальности второго порядка в одной составной задаче управления // Материалы международной научной конференции посвященной 90 летию Бакинского Государственного Университета. Баку, 30-31 октября, 2009, с. 90-91.

3. Мансимов К.Б., Насияти М.М. Условия оптимальности в одной ступенчатой задаче оптимального управления дискретными двухпараметрическими системами // Тезисы Межд. конф. по матем. и механике, посв.-ной 50-летию ИММ НАН Азерб. Баки-2009, с. 211.

4. Насияти М.М. Исследование одной ступенчатой дискретной двухпараметрической задачи управления // BDU-nun 90 illik yubileyinə həsr olunmuş “Riyaziyyat, informatika və iqtisadiyyatın müasir problemləri” mövzusunda Respublika Elmi Konfransının materialları. Bakı-2009, s. 154-159.

5. Насияти М.М. Об одной ступенчатой задаче управления для дискретных систем // AMEA aspirantlarının Elmi Konfransının Materialları, iyun 2009-cu il. Bakı-“ELM”, səh. 99-102.

6. Mansimov K., Nasiyati M. Second order necessary optimality conditions in the discrete two-parameter step control problems // The Third International Conference “Problems of Cybernetics and Informatics”. Baku, Azerbaijan. 2010, vol. III, 6-8 september, pp. 84-87.

7. Mansimov K.B., Nasiyati M.M. Necessary optimality conditions of second order in discrete two-parameter stepwise control problems // Reports seminar of I. Vekua Institute of applied mathematics. Tbilisi. 2010-2011, vol. 36-37, pp 51-65.

8. Насияти М.М. Необходимые условия оптимальности квазиособых управлений в дискретных двухпараметрических ступенчатых задачах управления // Известия НАНА. Сер. физ.-тех. и мат. наук. Баку, 2011, том XXXI, № 6, с. 64-72.

9. Мансимов К.Б., Насияти М.М. Необходимые условия оптимальности в одной многоэтапной дискретной задаче управления //

Журнал «Математическая и компьютерная моделирования». Украина, Серия физ.-мат. наук, 2011, выпуск 5, с. 162-179.

10. Мансимов К.Б., Насияти М.М. Об одной ступенчатой задаче управления для дискретных двухпараметрических систем // Доклады НАН Азербайджана, 2011, том LXVII, № 6, с. 3-11.

11. Мансимов К.Б., Насияти М.М. Необходимые условия оптимальности в одной негладкой многоэтапной дискретной 2-Д системе управления // «Проблемы управления и информатики». Международный научно-техн. журнал. Киев, Украина. 2012, № 4, стр. 34-43.

12. Насияти М.М. Об одной линейной задаче оптимального управления дискретными двухпараметрическими системами. // “Riyaziyyatın tətbiqi məsələləri və yeni informasiya texnologiyaları” II Respublika elmi konfransının materialları. Sumqayıt, 2012, səh. 39-40.

13. Насияти М.М. Об одной негладкой двухпараметрической дискретной задаче оптимального управления системами типа Форназини-Маркезини. // Докл. НАН Азербайджана, 2012, т. LXVIII, № 4, с. 21-26.

14. Nasiyati M.M. Linearized and Quadratic necessary optimality conditions in one 2-D discrete optimal control problem involving functional constraints of inequality type // PCI 2012, IV International Conference «Problems of Cybernetics and Informatics». Baku, Azerb. 2012, vol. IV, September 12-14, pp. 55-57.

MEHRİBAN MƏMMƏD qızı NƏSİYYƏTİ

**PİLLƏVARI DİSKRET İKİ PARAMETRLİ İDARƏETMƏ
MƏSƏLƏLƏRİNDƏ OPTİMALLIQ ŞƏRTLƏRİ**

XÜLASƏ

Dissertasiya işi pilləvari diskret iki parametrlı optimal idarəetmə məsələlərində optimallıq üçün şərtlər alınmasına və məxsusi idarələrin tədqiqinə həsr olunmuşdur.

Optimallıq üçün birinci tərtib zəruri şərtlər alınmış, onların cırlaşdığı hallar tədqiq olunmuşdur. Keyfiyyət meyarı hamar olmayan hal ayrıca tədqiq edilmişdir. İdarə oblastı açıq olduqda optimallıq üçün ikinci tərtib zəruri şərtlər tapılmışdır.

Xətti halda optimallıq üçün diskret maksimum şərti formasında zəruri və kafi şərt alınmışdır.

MEHRIBAN MAMMAD NASIYYATI

**OPTIMALITY CONDITIONS IN STEPWISE DISCRETE TWO-
PARAMETER CONTROL PROBLEMS**

ABSTRACT

The dissertaion work was devoted to obtaining optimality conditions in stepwise discrete two-parameter control problems and investigation of singular controls.

Necessary optimality conditions of first order were obtained, their degeneration cases were studied. The case for a non-smooth quality criterion was separately investigated. Necessary optimality conditions of second order, when the control domain is open, were found.

A necessary and necessary condition was obtained in the form of discrete maximum condition for optimality in linear case.

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
İDARƏETMƏ SİSTEMLƏRİ İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

MEHRİBAN MƏMMƏD QIZI NƏSİYYƏTİ

PİLLƏVARİ DİSKRET İKİ PARAMETRLİ İDARƏETMƏ
MƏSƏLƏLƏRİNDƏ OPTİMALLIQ ŞƏRTLƏRİ

1203.01 – Kompüter elmləri

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim edilmiş
dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı - 2015