

**AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
İDARƏETMƏ SİSTEMLƏRİ İNSTİTUTU**

Əlyazması hüququnda

RƏSMİYYƏ RZA QIZI ƏMİROVA

**BİR SİNİF FƏRQ TƏNLİKLƏRİ İLƏ TƏSVİR OLUNAN
İDARƏETMƏ MƏSƏLƏLƏRİNDƏ OPTİMALLIQ ŞƏRTLƏRİ**

1203.01 – Kompüter elmləri

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı – 2014

İş AMEA-nın İdarəetmə Sistemləri institutunun “Mürəkkəb dinamik sistemlərdə idarəetmə” laboratoriyasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
K.B.Mənsimov

Rəsmi opponentlər:

- fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor **T.Q. Məlikov**
- fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent **S.A. Həşimov**

Aparıcı təşkilat:

Sumqayıt Dövlət Universitetinin “Diferensial tənliklər və optimallaşdırma” kafedrası

Müdafiə “ 12 ” dekabr 2014-cü ildə saat 13⁰⁰-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının İdarəetmə Sistemləri institutu nəzdindəki D01.121 Dissertasiya Şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Ünvan: AZ 1141, Bakı ş., B.Vahabzadə küç., 9.

Dissertasiya ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının İdarəetmə Sistemləri institutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Avtoreferat “12 ” noyabr 2014-cü ildə göndərilmişdir.

D01.121 Dissertasiya Şurasının elmi katibi,
fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent

Ə.B.Paşayev

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı. Elm və texnikanın müxtəlif məsələlərinin tədqiqi zamanı ilk növbədə öyrənilən obyektin və ya prosesin riyazi modeli qurulur. Qurulmuş model nə qədər sadə olsa onun, məsələn, optimal idarəetmə nöqtəyi nəzərdən araşdırılması bir o qədər asan olur. Bu mənada adi diferensial və ya fərq tənlikləri ilə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələləri nisbətən sadədir. Bu cür məsələlərdə optimallığın araşdırılmasında ən güclü üsullardan biri Pontryaginın maksimum prinsipi və bu prinsipin diskret analoqudur.

Məlumdur ki, iqtisadiyyatın, biologiyanın, texnikanın bir çox sahələrindən olan proseslər Volterra tip integro-diferensial, integral tənliklərlə və yaxud onların fərq analoqları ilə təsvir olunur.

Kəsilməz və ya diskret zamanlı Volterra tip tənliklər populyasiyanın dinamikasının, bütöv mühit mexanikasının, biomexanikanın və s. məsələlərinin modelləşdirilməsində istifadə olunur. Xüsusi halda, bu tip tənliklər gələcək halı bütün keçmiş halı ilə təyin olunan proseslərin davranışını modelləşdirirlər.

A.Ə.Abdullayevin, A.A.Abuladzenin, Y.A.Andreyevanın, A.A.Butkovskinin, V.R.Vinokurovun, C.Varqanın, R.Qabasov və F.M.Kirillovanın, V.B.Kolmanovskinin, K.B.Mənsimovun, T.C.Angellin, K. Dela Veqanın, S.A.Belbasın, D.A.Karlsonun, M.A.Kazeminin və s. işlərində optimallıq üçün zəruri və bəzi hallarda isə kafi şərtlər çıxarılmış, integral tənliklərlə təsvir olunan optimal idarə məsələlərində optimal idarəetmənin varlığı üçün teoremlər isbat edilmişdir.

Lakin kəsilməz haldan fərqli olaraq, Volterra tip fərq tənlikləri ilə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələləri çox az araşdırılmışdır. Bu istiqamətdə A.B.Başkovun, İ.V.Qayşunun, M.P.Dimkovun, K.B.Mənsimovun, R.O.Məstəliyevin və s. işlərini qeyd edək. Burada optimallıq üçün zəruri və bəzi hallarda kafi şərtlər alınmış, idarəolunma məsələləri öyrənilmiş, məxsusi hallar araşdırılmışdır. Bu zaman proseslərin bir ölçülü Volterra fərq tənlikləri ilə təsvir olunduğu fərz edilir.

İkiölçülü Volterra tip integral tənliklərin və ya ikiölçülü Volterra tip integro-diferensial tənliklərin fərq analoqu ilə təsvir edilən proseslərdə isə optimal idarəetmə məsələləri bu vaxta qədər faktiki olaraq araşdırılmamışdır.

Beləliklə, ikiölçülü Volterra tip fərq tənlikləri ilə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələlərində optimallıq üçün zəruri və kafi şərtlər nəzəriyyəsinin işlənilməsi aktualdır.

İşin məqsədi. Volterra tip ikiölçülü fərq tənlikləri ilə təsvir olunan proseslərdə optimallıq üçün zəruri və bir halda isə həm zəruri, həm də kafi şərtlərin alınması, optimallıq üçün birinci tərtib zəruri şərtlərin cırlaşdığı halların öyrənilməsidir.

Tədqiqat üsulları. İşdə Volterra fərq tənlikləri nəzəriyyəsi, variasiya hesabı nəzəriyyəsi və optimal idarəetmə nəzəriyyəsi üsullarından istifadə edilmişdir.

Elmi yeniliyi. Dissertasiyanın əsas nəticələri yenidir və aşağıdakılardan ibarətdir:

- Hiperbolik tip xətti integro-diferensial tənliklərin diskret analoqu olan ikiölçülü fərq tənlikləri üçün sərhəd məsələsinin və ikiölçülü Volterra tip integral tənliyin fərq analoqu olan Volterra tip fərq tənliyinin həllinin göstəriləsi alınmışdır.

- İstiqamətlərə görə törəmələr terminlərində optimallıq üçün birinci tərtib zəruri şərtlər alınmışdır.

- Optimallıq üçün Pontryagin diskret maksimum prinsipi tipli, xəttləşdirilmiş maksimum şərti və Eyler tənliyinin analoqu formasında birinci tərtib zəruri şərtlər çıxarılmışdır.

- Baxılan məsələlərdə Pontryagin maksimum prinsipi mənasında məxsusi idarələrin və kvaziməxsusi idarələrin optimallığı üçün zəruri şərtlər alınmışdır.

- İdarə oblastı açıq olan halda optimallıq üçün ikinci tərtib zəruri şərtlər çıxarılmışdır.

İşin nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Dissertasiyanın əsas nəticələri yenidir və nəzəri xarakter daşıyır. Bu nəticələr gələcəkdə diskret ikiparametrlili Volterra sistemlərində optimallıq üçün zəruri və kafi şərtlər nəzəriyyəsinin işlənilməsində istifadə oluna bilər. Onlar həm də praktikada konkret məsələlərin həllində də istifadə edilə bilər.

İşin aprobasiyası. Dissertasiyanın əsas nəticələri Bakı Dövlət Universitetinin “Riyazi kibernetika” kafedrasının seminarlarında, AMEA-nın Kibernetika İnstitutunun “Mürəkkəb dinamik sistemlərdə idarəetmə” laboratoriyasının seminarlarında, H.Ə.Əliyevin 85 illiyinə həsr olunmuş “Riyaziyyatın, İnformatikanın və İqtisadiyyatın müasir problemləri” mövzusunda keçirilmiş elmi konfransda (Bakı 2008-ci il), AMEA-nın Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun 50 illiyinə həsr olunmuş Riyaziyyat və Mexanika üzrə beynəlxalq konfransda (Bakı 2009-cu il), üçüncü beynəlxalq “Problems of Cybernetics and Informatics” (Bakı, 2010) adlı konfransda təqdim olunmuş və müzakirə edilmişdir.

Nəşr olunan məqalələr. Dissertasiya mövzusu üzrə 17 iş nəşr olunmuşdur. Müştərək işlərdə elmi rəhbərə yalnız məsələlərin qoyuluşu və alınan nəticələrin müzakirəsi məxsusdur.

İşin həcmi və strukturu. Dissertasiya işi şərti işarələr siyahısı, giriş, 3 fəsil, nəticə və 146 addan ibarət ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Dissertasiyanın həcmi 152 səhifədən ibarətdir.

İŞİN MƏZMUNU

Girişdə dissertasiya işinin mövzusunun aktuallığı əsaslandırılır, işə yaxın olan tədqiqatların qısa icmalı verilir və alınmış əsas nəticələr şərh edilir.

Dissertasiyanın birinci fəslə iki yarım fəsildən ibarətdir.

Birinci fəslin birinci yarım fəslində aşağıdakı kimi ikiölçülü xətti, bircins olmayan Volterra fərq tənliklər sisteminə baxılır:

$$z(t, x) = \sum_{\tau=t_0}^t \sum_{s=x_0}^x K(t, x, \tau, s) z(\tau, s) + f(t, x), \quad (1)$$

$$(t, x) \in D = \{(t, x): t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1; \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1\}.$$

Burada $K(t, x, \tau, s)$ – verilmiş $(n \times n)$ ölçülü diskret matris funksiya, t_0, t_1, x_0, x_1 – verilmiş ədədlər, $(t_1 - t_0, x_1 - x_0)$ fərqləri natural ədədlərdir, $f(t, x)$ – verilmiş n -ölçülü diskret vektor-funksiya, $z(t, x)$ – işə axtarılan n -ölçülü vektor-funksiyadır.

(1) tənliklər sistemi ikiölçülü Volterra tip xətti integral tənliklər sisteminin diskret analogudur.

Burada (1) tənliklər sisteminin həllərinin göstərilişini tapmaq tələb olunur.

Fərz edək ki, $R(m, \ell; t, x)$ aşağıdakı Volterra tip matris fərq tənliyinin həllidir:

$$R(m, \ell; t, x) = \sum_{\tau=t}^m \sum_{s=x}^{\ell} R(m, \ell; \tau, s) K(\tau, s, t, x) - K(m, \ell, t, x)$$

$$(t_0 \leq t \leq m \leq t_1; \quad x_0 \leq x \leq \ell \leq x_1). \quad (2)$$

Aşağıdakı teorem isbat edilmişdir.

Teorem 1. Verilmiş (1) tənliklər sisteminin həllinin göstərilişi aşağıdakı kimidir:

$$z(t, x) = f(t, x) - \sum_{\tau=t_0}^t \sum_{s=x_0}^x R(t, x; \tau, s) f(\tau, s). \quad (3)$$

Sonra daha ümumi sərbəst hədd halına baxılır.

Birinci fəslin ikinci yarımfəslində bir sinif hiperbolik tip xətti integro-diferensial tənliklər sistemi üçün Qursa məsələsinin fərq analoqu olan sərhəd məsələsinin həllinin göstərilişi ilə bağlı məsələyə baxılmışdır.

Dissertasiyanın ikinci fəslə altı yarımfəsildən ibarət olub Qursa sərhəd şərtlə hiperbolik tip integro-diferensial tənliklər sisteminin diskret analoqu olan fərq tənliklər sistemi ilə təsvir olunmuş optimal idarə məsələlərinin tədqiqinə həsr olunmuşdur.

İkinci fəslin birinci yarımfəslində

$$S(u) = \Phi(z(t_1, x_1)) \quad (4)$$

funksionalının

$$u(t, x) \in U \subset R^r, \\ (t, x) \in D = \{(t, x): t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1, x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1\}, \quad (5)$$

$$z(t+1, x+1) = \sum_{\tau=t_0}^t \sum_{s=x_0}^x f(t, x, \tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s)), \quad (6)$$

$$z(t_0, x) = a(x), x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1, z(t, x_0) = b(t), t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1, \quad (7) \\ a(x_0) = b(t_0)$$

məhdudiyyətləri daxilində minimumunun tapılması məsələsinə baxılır.

Burada t_0, t_1, x_0, x_1 – verilmiş ədədlər olub, $t_1 - t_0, x_1 - x_0$ fərqləri natural ədədlərdir, $f(t, x, \tau, s, z, u)$ – verilmiş, bütün dəyişənlərinə nəzərən z -ə görə xüsusi törəmələri ilə birlikdə kəsilməz n - ölçülü vektor-funksiya, $a(x), b(t)$ – verilmiş n -ölçülü diskret vektor-funksiyalar,

$u(t, x) - r$ -ölçülü idarəetmə vektoru, U – verilmiş boş olmayan, məhdud çoxluq, $\Phi(z)$ isə Lipşis şərtini ödəyən və bütün istiqamətlərə görə törəmələri olan verilmiş skalyar funksiyadır.

(5) məhdudiyyətini ödəyən hər bir $u(t, x)$ idarəetmə funksiyasını mümkün idarə, $(u(t, x), z(t, x))$ cütlüyünü isə mümkün proses adlandıracağıq.

Tutaq ki, $(u(t, x), z(t, x))$ qeyd olunmuş mümkün proses, $R(t, x; \tau, s)$ $(n \times n)$ ölçülü matris funksiyası isə

$$\begin{aligned} R(m+1, \ell+1; t, x) &= \sum_{\tau=t}^m \sum_{s=x}^{\ell} R(m+1, \ell+1; \tau+1, s+1) f_z(\tau, s, t, x, z(t, x), u(t, x)), \\ R(m+1, \ell+1; m+1, x) &= 0, \quad x = x_0, x_0+1, \dots, \ell, \\ R(m+1, \ell+1; t, \ell+1) &= 0, \quad t = t_0, t_0+1, \dots, m, \\ R(m+1, \ell+1; m+1, \ell+1) &= E \quad (E \text{ -vahid matrisdir}) \end{aligned} \quad (8)$$

sərhəd məsələsinin həllidir.

Fərz edək ki, $L_1(v)$ aşağıdakı düsturla təyin olunmuşdur:

$$L_1(v) = \sum_{m=t_0}^{t_1-1} \sum_{\ell=x_0}^{x_1-1} \left[\sum_{\tau=m}^{t_1-1} \sum_{s=\ell}^{x_1-1} R(t_1, x_1; \tau+1, s+1) \Delta_{v(m, \ell)} f(\tau, s, m, \ell, z(m, \ell), u(m, \ell)) \right],$$

harada ki,

$$\begin{aligned} \Delta_{v(m, \ell)} f(\tau, s, m, \ell, z(m, \ell), u(m, \ell)) &= \\ &= f(\tau, s, m, \ell, z(m, \ell), v(m, \ell)) - f(\tau, s, m, \ell, z(m, \ell), u(m, \ell)). \end{aligned}$$

Aşağıdakı çoxluğu daxil edək:

$$f(t, x, \tau, s, z(\tau, s), U) = \{\alpha: \alpha = f(t, x, \tau, s, z(\tau, s), v), \quad v \in U\}. \quad (9)$$

Teorem 2. Əgər (9) çoxluğu qabarıqdırsa, onda $u(t, x)$ mümkün idarəsinin (4)-(7) məsələsində optimal idarə olması üçün zəruri şərt

$$\frac{\partial \Phi(z(t_1, x_1))}{\partial L_1(v)} \geq 0 \quad (10)$$

bərabərsizliyinin bütün $v(t, x) \in U$, $(t, x) \in D$ üçün ödənməsidir.

(10) bərabərsizliyi istiqamətlərə görə törəmə terminində optimallıq üçün birinci tərtib zəruri şərtidir. O, maksimum və ya minimum tipli funksional hallarını da əhatə edir və eləcə də ondan diskret maksimum prinsipinin analoquunu almaq olar.

Sonra minimaks məsələsinə, yəni maksimum tipli funksional halına baxılır. Optimallıq üçün maksimum formasında zəruri şərt isbat edilmişdir.

Daha sonra idarəetmə oblastının qabarıq olduğu hal öyrənilmişdir.

İkinci fəslin ikinci yarım fəsilində bərabərsizliklər şəklində funksional məhdudiyyətlər olan hala baxılmışdır.

$$S_0(u) = \Phi_0(z(t_1, x_1)) \quad (11)$$

funksionalının minimumu

$$u(t, x) \in U \subset R^r, \quad (12)$$

$$(t, x) \in D = \{(t, x): t = t_0, t_0 + 1, t_0 + 2, \dots, t_1 - 1, x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1\},$$

$$S_i(u) = \Phi_i(z(t_1, x_1)) \leq 0, \quad i = \overline{1, p}, \quad (13)$$

$$z(t+1, x+1) = \sum_{\tau=t_0}^t \sum_{s=x_0}^x f(t, x, \tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s)), \quad (t, x) \in D, \quad (14)$$

$$z(t_0, x) = a(x), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1, \quad z(t, x_0) = b(t), \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1, \quad (15)$$

$$a(x_0) = b(t_0)$$

məhdudiyyətləri daxilində axtarılır.

Burada $\Phi_i(z)$, $i = \overline{0, p}$ – Lipşis şərtini ödəyən və bütün istiqamətlər üzrə törəməsi olan verilmiş skalyar funksiyalardır, (11)–(15) məsələsinin digər verilənləri isə ikinci fəslin birinci yarım fəsilində gətirilən hamarlıq şərtlərini ödəyirlər.

Əgər (14)-(15) məsələsinin $u(t, x)$ idarə funksiyasına uyğun $z(t, x)$ həlli (13) məhdudiyyətlərini ödəyərsə, onda $u(t, x)$ idarəsini mümkün idarə adlandıracaq.

Tutaq ki, $(u(t, x), z(t, x))$ qeyd olunmuş mümkün prosesdir.

$$I(u) = \{ i: S_i(u(t, x)) = 0, i = \overline{1, p} \}, \quad J(u) = I(u) \cup \{0\}$$

işarələməsini daxil edək.

Teorem 3. Əgər (9) çoxluğu qabarıqdırsa, onda $u(t, x)$ mümkün idarəsinin (11)-(15) məsələsində optimallığı üçün zəruri şərt

$$\max_{i \in J(u)} \frac{\partial \Phi_i(z(t_1, x_1))}{\partial L_1(v)} \geq 0 \quad (16)$$

bərabərsizliyin bütün $v(t, x) \in U, (t, x) \in D$ üçün ödənməsidir.

Daha sonra U idarə oblastının qabarıq olduğu halda optimallıq üçün başqa tip birinci tərtib zəruri şərtlər alınmışdır.

İkinci fəslin üçüncü yarım fəslində keyfiyyət funksionalının kifayət qədər hamarlığını fərz edərək optimallıq üçün diskret maksimum şərti formasında zəruri şərt çıxarılmış və məxsusi hal araşdırılmışdır.

$$S(u) = \varphi(z(t_1, x_1)) \quad (17)$$

funksionalının

$$u(t, x) \in U \subset R^r, \quad (18)$$

$$(t, x) \in D = \{(t, x): t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1, x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1\},$$

$$z(t+1, x+1) = \sum_{\tau=t_0}^t \sum_{s=x_0}^x f(t, x, \tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s)), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} z(t_0, x) &= a(x), & x &= x_0, x_0 + 1, \dots, x_1, \\ z(t, x_0) &= b(t), & t &= t_0, t_0 + 1, \dots, t_1, \\ a(x_0) &= b(t_0) \end{aligned} \quad (20)$$

şərtləri daxilində minimumunun tapılması məsələsinə baxılır.

Burada t_0, t_1, x_0, x_1 – verilmiş ədədlər olub $t_1 - t_0, x_1 - x_0$ fərqləri natural ədədlərdir, $f(t, x, \tau, s, z, u)$ – verilmiş, bütün dəyişənlərinin küllüsünə nəzərən z -ə görə ikinci tərtibə qədər xüsusi törəmələri ilə birlikdə kəsilməz n - ölçülü vektor-funksiya, $\varphi(z)$ – isə verilmiş iki dəfə kəsilməz diferensiallanan skalyar funksiyadır. Yerdə qalan bütün verilənlər birinci yarımfəsildə qoyulan hamarlıq şərtlərini ödəyirlər.

Burada əsas məqsəd məxsusi idarələrin optimallığı üçün zəruri şərtlərin alınmasıdır.

$(u(t, x), z(t, x))$ prosesini mümkün proses hesab edərək Hamilton-Pontryagin funksiyasının analoqunu aşağıdakı kimi daxil edək:

$$H(t, x, z, u, \psi(t, x)) = \sum_{\tau=t}^{t_1-1} \sum_{s=x}^{x_1-1} \psi'(\tau, s) f(\tau, s, t, x, z, u).$$

Burada $\psi = \psi(t, x)$ qoşma dəyişənlərin n -ölçülü vektor-funksiyasıdır və aşağıdakı qoşma məsələnin həllidir:

$$\psi(t-1, x-1) = H_z(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x)), \quad (21)$$

$$\psi(t_1-1, x-1) = 0, \quad x = x_0, x_0+1, \dots, x_1-1,$$

$$\psi(t-1, x_1-1) = 0, \quad t = t_0, t_0+1, \dots, t_1-1, \quad (22)$$

$$\psi(t_1-1, x_1-1) = -\varphi_z(z(t_1, x_1)).$$

Bundan sonra hər yerdə aşağıdakı tipli işarələmələrdən istifadə ediləcəkdir:

$$\begin{aligned} & \Delta_{v(t,x)} H(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x)) = \\ & = H(t, x, z(t, x), v(t, x), \psi(t, x)) - H(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x)). \end{aligned}$$

Teorem 4. Əgər (9) çoxluğu qabarıqdırsa, onda (17)-(20) məsələsində $u(t, x)$ mümkün idarəsinin optimal idarə olması üçün zəruri şərt

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(t,x)} H(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x)) \leq 0 \quad (23)$$

bərabərsizliyin bütün $v(t, x) \in U$, $(t, x) \in D$ üçün ödənməsidir.

Bu bərabərsizlik diskret maksimum şərtinin analoqudur.

Tərif 1. Əgər bütün $v(t, x) \in U$, $(t, x) \in D$ üçün

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(t,x)} H(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x)) \equiv 0 \quad (24)$$

şərti ödənərsə, onda $u(t, x)$ mümkün idarəsinə (17)-(20) məsələsində Pontryaginın maksimum prinsipi mənadə məxsusi idarə deyəcəyik.

(24) şərtini ödəyən hər bir mümkün idarəni məxsusi ekstremal və yaxud Pontryaginın məxsusi ekstremalı adlandıracağıq. Aydındır ki, məxsusi ekstremal üçün Pontryaginın maksimum şərti (23), hətta məsələ, yoxlama mənasında da effektiv deyil.

Tutaq ki, $\ell_1(t, x)$ vektor-funksiyası

$$\begin{aligned} \ell_1(t+1, x+1) &= \sum_{\tau=t_0}^t \sum_{s=x_0}^x [f_z(t, x, \tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s)) \ell_1(\tau, s) + \\ &\quad + \Delta_{v(\tau, s)} f(t, x, \tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s))] , \\ \ell_1(t, x_0) &= 0, \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1, \\ \ell_1(t_0, x) &= 0, \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 \end{aligned}$$

məsələsinin həllidir.

Teorem 5. Əgər (9) çoxluğu qabarıqdırsa, onda məxsusi $u(t, x)$ ekstremalının (17)-(20) məsələsində optimal idarə olması üçün zəruri şərt

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [\ell'_1(t, x) H_{zz}(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x)) \ell_1(t, x) +$$

$$+ 2 \Delta_{v(t,x)} H'_z(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x)) \ell_1(t, x) \Big] - \ell'_1(t_1, x_1) \varphi_{zz}(z(t_1, x_1)) \ell(t_1, x_1) \leq 0 \quad (25)$$

bərabərsizliyin bütün $v(t, x) \in U, (t, x) \in D$ üçün ödənməsidir.

Alınan nəticə məxsusi ekstremalların optimallığı üçün kifayət qədər ümumi zəruri şərtidir. Lakin bu zəruri şərti yoxlamaq çox çətindir. Ona görə də bu nəticəyə optimallıq üçün (17)-(20) məsələsinin parametrləri vasitəsilə ifadə olunmuş daha sadə və asan yoxlanıla bilən zəruri şərtləri almaq yolunda bir aralıq nəticə kimi də baxmaq olar.

Fərz edək ki,

$$f(t, x, \tau, s, z, u) = A(t, x, \tau, s) g(\tau, s, z, u), \quad (26)$$

harada ki, $A(t, x, \tau, s)$ – verilmiş $(n \times n)$ ölçülü matris funksiya, $g(\tau, s, z, u)$ isə $f(t, x, \tau, s, z, u)$ funksiyasının ödədiyi hamarlıq şərtlərini ödəyir.

$$Q_1(t, x, m, \ell) = \sum_{\tau=m}^{t-1} \sum_{s=\ell}^{x-1} R(t, x; \tau + 1, s + 1) A(\tau, s, m, \ell)$$

fərz edib

$$K_1(m, \ell, \alpha, \beta) = -Q'_1(t_1, x_1, m, \ell) \varphi_{zz}(z(t_1, x_1)) Q_1(t_1, x_1, \alpha, \beta) + \sum_{t=\max(m, \alpha)+1}^{t_1-1} \sum_{x=\max(\ell, \beta)+1}^{x_1-1} Q'_1(t, x, m, \ell) H_{zz}(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x)) Q_1(t, x, \alpha, \beta) \quad (27)$$

$(n \times n)$ ölçülü matris funksiyasına baxaq.

Burada $R(t, x, \tau, s)$ (8) məsələsinin $f(t, x, \tau, s, z, u)$ vektor-funksiyasının (26) ifadəsini nəzərə almaqla həllidir.

Teorem 6. Əgər

$$g(t, x, z(t, x), U) = \{\alpha : \alpha = g(t, x, z(t, x), v), v \in U\} \quad (28)$$

çoxluğu qabarıqdırsa, onda Pontryagin məxsusi ekstremalının (17)-(20), (26) məsələsində optimal idarə olması üçün zəruri şərt

$$\begin{aligned}
& \sum_{m, \alpha=t_0}^{t_1-1} \sum_{\ell, \beta=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(m, \ell)} g'(m, \ell, z(m, \ell), u(m, \ell)) K_1(m, \ell, \alpha, \beta) \times \\
& \quad \times \Delta_{v(\alpha, \beta)} g(\alpha, \beta, z(m, \ell), u(m, \ell)) + \\
& + \sum_{m=t_0}^{t_1-1} \sum_{\ell=x_0}^{x_1-1} \left[\sum_{m=t_0}^{t_1-1} \sum_{\ell=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(t, x)} H'_z(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x)) Q_1(t, x, m, \ell) \times \right. \\
& \quad \left. \times \Delta_{v(m, \ell)} g(m, \ell, z(m, \ell), u(m, \ell)) \right] \leq 0
\end{aligned} \tag{29}$$

bərabərsizliyinin bütün $v(t, x) \in U$, $(t, x) \in D$ üçün ödənməsidir.

Göründüyü kimi, artıq (29) bərabərsizliyi optimallıq üçün konstruktiv yoxlanıla bilən zəruri şərtidir.

İkinci fəslin dördüncü yarımfəslində (17)-(20) məsələsinin araşdırılması məsələnin verilənləri üzərinə aşağıdakı əlavə şərtləri də qoymaqla davam etdirilmişdir; 1) U – çoxluğu qabarıqdır, 2) $f(t, x, \tau, s, z, u)$ vektor-funksiyası bütün dəyişənləri küllüsünə nəzərən (z, u) ya görə ikinci tərtibə qədər xüsusi törəmələri ilə birlikdə kəsilməzdir.

Bu əlavə şərtlər daxilində xəttiləşdirilmiş maksimum şərtinin analoqu çıxarılmış və kvaziməxsusi hal araşdırılmışdır.

Teorem 7. (Xəttiləşdirilmiş maksimum şərti) Əgər U çoxluğu qabarıqdırsa və $f(t, x, \tau, s, z, u)$ bütün dəyişənləri küllüsünə nəzərən (z, u) -ya görə xüsusi törəmələri ilə birlikdə kəsilməzdirsə, onda (17)-(20) məsələsində $u(t, x)$ mümkün idarəsinin optimal olması üçün zəruri şərt

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H'_u(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x)) (v(t, x) - u(t, x)) \leq 0 \tag{30}$$

bərabərsizliyinin bütün $v(t, x) \in U$, $(t, x) \in D$ üçün ödənməsidir.

Daha sona xəttiləşdirilmiş maksimum şərtinin cırlaşdığı hal öyrənilir.

Tərif 2. Əgər bütün $v(t, x) \in U$, $(t, x) \in D$ üçün

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H'_u(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x)) (v(t, x) - u(t, x)) = 0 \tag{31}$$

münasibəti ödənersə, onda $u(t, x)$ mümkün idarəsinə (17)-(20) məsələsində kvaziməxsusi idarə deyəcəyik.

İşdə əvvəlcə kvaziməxsusi idarələrin optimallığı üçün qeyri-aşkar şəkildə verilmiş zəruri şərt isbat edilmiş, sonra bu şərtədən optimallıq üçün konstruktiv yoxlanıla bilən zəruri şərtlər alınmışdır.

Teorem 8. Əgər U çoxluğu qabarıq olub $f(t, x, \tau, s, z, u)$ funksiyası bütün dəyişənləri küllüsünə nəzərə nə (z, u) -ya görə ikinci tərtibə qədər xüsusi törəmələri ilə birlikdə kəsilməzdirsə, onda (17)-(20) məsələsində $u(t, x)$ kvaziməxsusi idarəsinin optimallığı üçün zəruri şərt

$$\begin{aligned} & \sum_{m=t_0}^{t_1-1} \sum_{\ell=x_0}^{x_1-1} \sum_{\alpha=t_0}^{t_1-1} \sum_{\beta=x_0}^{x_1-1} (v(m, \ell) - u(m, \ell))' K_2(m, \ell, \alpha, \beta) (v(\alpha, \beta) - u(\alpha, \beta)) + \\ & + 2 \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\sum_{m=t_0}^{t-1} \sum_{\ell=x_0}^{x-1} (v(t, x) - u(t, x))' H_{uz}(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x)) \times \right. \\ & \times Q_2(t, x, m, \ell) (v(m, \ell) - u(m, \ell)) \left. \right] + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} (v(t, x) - u(t, x))' \times \\ & \times H_{uu}(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x)) (v(t, x) - u(t, x)) \leq 0 \end{aligned} \quad (32)$$

bərabərsizliyin bütün $v(t, x) \in U, (t, x) \in D$ üçün ödənməsidir.

Burada

$$\begin{aligned} K_2(m, \ell, \alpha, \beta) &= -Q_2'(t_1, x_1, m, \ell) \varphi_{zz}(z(t_1, x_1)) Q_2(t_1, x_1, \alpha, \beta) + \\ & + \sum_{t=\max(m, \alpha)+1}^{t_1-1} \sum_{x=\max(\ell, \beta)+1}^{x_1-1} Q_2'(t, x, m, \ell) H_{zz}(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x)) \times \\ & \times Q_2(t, x, \alpha, \beta), \end{aligned} \quad (33)$$

harada ki, tərifə əsasən

$$Q_2(t, x, m, \ell) = \sum_{\tau=m}^{t-1} \sum_{s=\ell}^{x-1} R(t, x; \tau+1, s+1) f_u(\tau, s, m, \ell, z(m, \ell), u(m, \ell)), \quad (34)$$

$R(t, x; \tau, s)$ isə (8) məsələsinin həlli olan, $(n \times n)$ ölçülü matris funksiyadır.

(32) bərabərsizliyindən optimallıq üçün daha asan yoxlanıla bilən zəruri şərtlər alınır.

Bunlardan birini götürək.

Teorem 9. Kvaziməxsusi $u(t, x)$ idarəsinin (17)-(20) məsələsində optimallığı üçün zəruri şərt

$$(w - u(\theta, \xi))' (K_2(\theta, \xi, \theta, \xi) + H_{uu}(\theta, \xi, z(\theta, \xi), u(\theta, \xi), \psi(\theta, \xi))) \times \\ \times (w - u(\theta, \xi)) \leq 0 \quad (35)$$

bərabərsizliyinin bütün $w \in U$, $(\theta, \xi) \in D$ üçün ödənməsidir.

(35) münasibəti məlum Qabasov-Kirillova şərtinin analoqudur.

İkinci fəslin beşinci yarım fəslə idarə oblastının açıq olduğu halda (17)-(20) məsələsinin araşdırılmasına həsr olunmuşdur.

Əvvəlcə optimallıq üçün qeyri-aşkar şəkildə verilmiş birinci və ikinci tərtib zəruri şərtlər çıxarılmışdır. Daha sonra onların köməyi ilə optimallıq üçün konstruktiv yoxlanıla bilən birinci və ikinci tərtib zəruri şərtlər alınmışdır.

Teorem 10. Əgər U çoxluğu açıqdırsa, onda $u(t, x)$ mümkün idarəsinin (17)-(20) məsələsində optimallığı üçün zəruri şərt

$$H_u(\theta, \xi, z(\theta, \xi), u(\theta, \xi), \psi(\theta, \xi)) = 0 \quad (36)$$

münasibətinin bütün $(\theta, \xi) \in D$ üçün ödənməsidir.

(36) münasibəti (17)-(20) məsələsi üçün Eyler tənliyinin analoqudur.

Tərif 3. Eyler tənliyinin hər bir $u(t, x)$ həllini klassik ekstremal adlandıracağıq.

Tərifdən aydındır ki, optimal idarə klassik ekstremaldır, lakin hər klassik ekstremal optimal idarə deyil.

Ona görə də alınan qeyri-aşkar ikinci tərtib zəruri şərtədən istifadə edərək optimallıq üçün yeni zəruri şərtlər alınmışdır. Bu yeni şərtlər optimallığa şübhəli klassik ekstremallar çoxluğunu daraltmağa imkan verir.

Teorem 11. $u(t, x)$ klassik ekstremalının (17)-(20) məsələsində optimallığı üçün zəruri şərt

$$\begin{aligned} & \sum_{m=t_0}^{t_1-1} \sum_{\ell=x_0}^{x_1-1} \sum_{\alpha=t_0}^{t_1-1} \sum_{\beta=x_0}^{x_1-1} \delta u'(m, \ell) K_2(m, \ell, \alpha, \beta) \delta u(\alpha, \beta) + \\ & + 2 \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\sum_{m=t_0}^{t-1} \sum_{\ell=x_0}^{x-1} \delta u'(t, x) H_{uz}(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x)) Q_2(t, x, m, \ell) \delta u(m, \ell) \right] + \\ & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta u'(t, x) H_{uu}(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x)) \delta u(t, x) \leq 0 \end{aligned} \quad (37)$$

bərabərsizliyin bütün $\delta u(t, x) \in R^r$, $(t, x) \in D$ üçün ödənməsidir.

Daha sonra bərabərliklər və bərabərsizliklər şəklində funksional məhdudiyyətlər olan hala baxılmış və optimallıq üçün birinci və ikinci tərtib zəruri şərtlər alınmışdır.

İkinci fəslin altıncı yarım fəslində xətti halda diskret maksimum prinsipi şəklində optimallıq üçün zəruri və kafi şərt çıxarılmışdır.

Dissertasiyanın üçüncü fəsilə üç yarım fəsildən ibarət olub, ikiölçülü Volterra tip integral tənliklərin diskret analoqu olan ikiölçülü Volterra tip fərq tənlikləri sistemi ilə təsvir olunmuş optimal idarəetmə məsələlərinin tədqiqinə həsr olunmuşdur.

Üçüncü fəslin birinci yarım fəslində baxılan məsələ ixtiyari məhdud idarə oblastı üçün öyrənilir.

Fərz edək ki, idarə olunan proses

$$\begin{aligned} z(t, x) &= \sum_{\tau=t_0}^t \sum_{s=x_0}^x f(t, x, \tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s)), \\ (t, x) &\in D = \{(t, x): t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1, x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1\} \end{aligned} \quad (38)$$

ikiölçülü qeyri-xətti Volterra tip fərq tənliklər sistemi ilə təsvir olunur.

Burada $f(t, x, \tau, s, z, u)$ – verilmiş n -ölçülü vektor-funksiya olub, dəyişənləri küllüsünə nəzərən z -ə görə ikinci tərtibə qədər bütün xüsusi törəmələri ilə birlikdə kəsilməzdir, t_0, t_1, x_0, x_1 – verilmiş ədədlərdir, belə ki, $t_1 - t_0$ və $x_1 - x_0$ – natural ədədlərdir, $u(t, x)$ – isə qiymətlərini boş

olmayan və məhdud $U \subset R^r$ çoxluğundan alan r -ölçülü idarə vektorudur, yəni

$$u(t, x) \in U \subset R^r, (t, x) \in D. \quad (39)$$

Bu cür idarəedici vektor-funksiyalarını mümkün idarə adlandıracağıq.

(38) tənliyinin bütün mümkün idarələrə uyğun həlləri üzərində

$$S(u) = \varphi(z(t_1, x_1)) \quad (40)$$

funksionalını təyin edək. Burada $\varphi(z)$ – verilmiş iki dəfə kəsilməz diferensiallanan skalyar funksiyadır.

Fərz edək ki, $(u(t, x), z(t, x))$ qeyd olunmuş mümkün prosesdir

$$f(t, x, \tau, s, z(\tau, s), U) = \{\alpha : \alpha = f(t, x, \tau, s, z(\tau, s), v), v \in U\} \quad (41)$$

coxluğunu və

$$\begin{aligned} H(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x)) = & \sum_{\tau=t}^{t_1} \sum_{s=x}^{x_1} \psi'(\tau, s) f(\tau, s, t, x, z(t, x), u(t, x)) - \\ & - \varphi'_z(z(t_1, x_1)) f_z(t_1, x_1, t, x, z(t, x), u(t, x)) \end{aligned}$$

Hamilton-Pontryagin funksiyasını daxil edək.

Burada $\psi = \psi(t, x)$ – qoşma dəyişənlərin n -ölçülü vektor-funksiyası olub

$$\psi(t, x) = H_z(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x)) \quad (42)$$

tənliyinin həllidir.

Bu (42) tənliyi (38)-(40) idarə məsələsi üçün qoşma sistemin analoqudur və $\psi(t, x)$ -ə görə xətti, qeyri-bircins iki ölçülü Volterra fərq tənliyidir.

Teorem 12. Əgər (41) çoxluğu qabarıqdırsa, onda $u(t, x)$ mümkün idarəsinin (38)-(40) məsələsində optimallığı üçün zəruri şərt

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1} \Delta_{v(t,x)} H(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x)) \leq 0 \quad (43)$$

bərabərsizliyinin bütün $v(t, x) \in U, (t, x) \in D$ üçün ödənməsidir.

Pontryagin (43) diskret maksimum şərtini ödəyən və optimal olmayan mümkün idarələrin sayı kifayət qədər çox ola bilər. Bundan başqa, (43) şərtinin cırlaşmasını, yəni eynilik kimi ödənməsini də istisna etmək olmaz.

Ona görə də daha sonra (43) optimallıq şərtinin cırlaşdığı hal araşdırılmışdır.

Tərif 4. Əgər bütün $v(t, x) \in U, (t, x) \in D$ üçün

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1} \Delta_{v(t,x)} H(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x)) = 0$$

münasibəti ödənərsə, onda $u(t, x)$ mümkün idarəsini (38)-(40) məsələsində Pontryagin maksimum prinsipi mənasında məxsusi idarə adlandıracağıq.

Bu tərifdən görünür ki, Pontryagin maksimum prinsipi mənasında məxsusi idarələr üçün (43) maksimum şərti trivial olaraq ödənilir.

Fərz edək ki, $y(t, x)$ funksiyası

$$\begin{aligned} y(t, x) = & \sum_{\tau=t_0}^t \sum_{s=x_0}^x [f_z(t, x, \tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s)) y(\tau, s) + \\ & + \Delta_{v(\tau,s)} f(t, x, \tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s))] \end{aligned} \quad (44)$$

xətti, qeyri-bircins Volterra tip fərq tənliyinin həllidir.

Teorem 13. Əgər $(u(t, x), z(t, x))$ prosesi boyunca (41) çoxluğu qabarıqdırsa, onda Pontryagin maksimum prinsipi mənasında məxsusi $u(t, x)$ idarəsinin (38)-(40) məsələsində optimallığı üçün zəruri şərt

$$\begin{aligned}
& y'(t_1, x_1) \varphi_{zz}(z(t_1, x_1)) y(t_1, x_1) - \\
& - \sum_{t=t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1} [y'(t, x) H_{zz}(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x)) y(t, x) + \\
& + 2 \Delta_{v(t, x)} H'_z(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x)) y(t, x)] \geq 0
\end{aligned} \tag{45}$$

bərabərsizliyin bütün $v(t, x) \in U$, $(t, x) \in D$ üçün ödənməsidir.

(45) bərabərsizliyi Pontryaginın maksimum prinsipi mənasında məxsusi idarələrin optimallığı üçün kifayət qədər ümumi zəruri şərtidir.

Optimallıq üçün bu zəruri şərti yoxlamaq üçün hər bir $v(t, x) \in U$ mümkün idarəsi üçün (44) tənliyinin həllini tapmaq lazımdır və bu da zəruri şərtin praktik yoxlanma effektini azaldır. Lakin bu bərabərsizlikdən istifadə edərək, bir sıra hallarda məxsusi idarələrin optimallığı üçün (38)-(40) məsələsinin parametrləri vasitəsilə aşkar şəkildə ifadə olunan konstruktiv yoxlanıla bilən zəruri şərtlər almaq olur.

Üçüncü fəsilin ikinci yarım fəslində idarə oblastının qabarıq olduğu, $f(t, x, \tau, s, z, u)$ funksiyasının bütün dəyişənlərinə nəzərən (z, u) -ya görə ikinci tərtibə qədər bütün xüsusi törəmələri ilə birlikdə kəsilməz olduğu hala baxılır.

Əvvəlcə keyfiyyət funksionalının ikinci tərtibə qədər xüsusi artımının ayrılışı alınmışdır.

İsbat olunmuş bu ayrılış optimallıq üçün xəttləşdirilmiş maksimum şərti şəklində optimallıq üçün birinci tərtib müxtəlif zəruri şərtləri və eləcə də ikinci tərtib kvadratik zəruri şərtləri almağa imkan verir.

Üçüncü fəslin üçüncü yarım fəslində (38)-(40) məsələsinin araşdırılması əlavə şərtlər daxilində davam edilir. Fərz edilir ki, U çoxluğu açıq çoxluqdur və $f(t, x, \tau, s, z, u)$ bütün dəyişənlərinə nəzərən (z, u) -ya görə ikinci tərtibə qədər xüsusi törəmələri ilə birlikdə kəsilməzdir.

Əvvəlcə optimallıq üçün Eyler tənliyi şəklində birinci tərtib zəruri şərt alınmışdır. Daha sonra keyfiyyət funksionalının optimal proses boyunca ikinci variasiyasının mənfi olmadığı şərtindən istifadə edərək optimallıq üçün ikinci tərtib zəruri şərt alınmışdır.

Dissertant məsələnin qoyuluşu və faydalı məsləhətlərinə görə prof. K.B.Mənsimova öz minnətdarlığını bildirir.

Dissertasiya işinin əsas nəticələri:

Müdafiəyə çıxarılan əsas elmi nəticələr aşağıdakılardır:

– İki ölçülü xətti Volterra tip fərq tənliklər sistemi və integro-diferensial hiperbolik tənliklər sisteminin analoqu olan fərq tənliklər sistemi üçün həllin göstərilişi alınmışdır.

– İntegro-diferensial hiperbolik tip tənliklər sisteminin fərq analoqu olan fərq tənlikləri ilə təsvir olunmuş bir sinif optimal idarə məsələlərində optimallıq üçün birinci tərtib müxtəlif zəruri şərtlər alınmışdır.

– Bu tənliklər sistemi üçün idarə məsələsində məxsusi idarələrin (maksimum prinsipi mənasında məxsusi, kvaziməxsusi) optimallığı üçün zəruri şərtlər tapılmış və optimallıq üçün ikinci tərtib zəruri şərtlər çıxarılmışdır.

– Volterra tip fərq tənlikləri ilə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələsində optimallıq üçün birinci tərtib zəruri şərtlər alınmış, bu şərtlərin verilmiş məsələnin verilənlərinə qoyulan müxtəlif mədudiyyətlər və təkliflər daxilində cırlaşdığı hallar araşdırılmışdır.

Dissertasiya işinin nəticələri aşağıdakı nəşrlərdə əks olunmuşdur:

1. Мансимов К.Б., Амирова Р.Р. Представление решений одного класса линейных интегро-разностных уравнений / Материалы научной конференции «Современные проблемы математики, информатики и экономики» посвященный 85 летию Г.А.Алиева. Баку – 2008, с. 113-114.
2. Мансимов К.Б., Амирова Р.Р. Необходимое условие оптимальности в одной задаче управления, описываемой разностным аналогом двумерного интегрального уравнения Вольтерра // Изв. НАН Азербайджана, сер. физ.-техн. и мат. наук, 2009, т. XXIX, № 3, с. 56-60.
3. Мансимов К.Б., Амирова Р.Р. Необходимые условия оптимальности второго порядка в одной разностной задаче управления типа Вольтерра / Тезисы Межд. конф. по матем. и механике, посв.-ной 50-летию ИММ НАН Азерб. Баку-2009, с. 212.
4. Амирова Р.Р. Об одной задаче управления, описываемая, системой разностных уравнений типа Вольтерра / Bakı Dövlət Universitetinin 90 illik yubileyinə həsr olunmuş "Riyaziyyat, informatika və iqtisadiyyatın müasir problemləri" respublika elmi konfransının materialları. Bakı, 2009, s. 164-167.

5. Мансимов К.Б., Амирова Р.Р. О квазиособых управлениях в процессах, описываемых разностными уравнениями Вольтерра./ Материалы международной научной конференции посвященной 90-летию Бакинского Государственного Университета. Баку, 2009, с. 91-92.
6. Амирова Р.Р. О представлении решений линейных двумерных разностных уравнений типа Вольтерра./ Научная конференция аспирантов НАН Азербайджана. Баку: изд-во «Элм», 2009, с. 92-95.
7. Мансимов К.Б., Амирова Р.Р. Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в задаче управления, описываемой системой двумерных разностных уравнений типа Вольтерра // Изв. НАН Азербайджана, сер. физ.-техн. и мат. наук, 2010, т. XXX, № 3, с. 52-57.
8. Mansimov K., Amirova R. Investigation of one discrete control problem with inequality type functional constraints / The Third International Conference "Problems of Cybernetics and Informatics". Baku, Azerbaijan. Vol. III, 6-8 september, 2010, pp. 82-83.
9. Mansimov K., Amirova R. On one optimal control problem / The Third International Conference "Problems of Cybernetics and Informatics". Baku, Azerbaijan. Vol. III, 6-8 september, 2010, pp. 90-91.
10. Mansimov K.B., Amirova R.R. Necessary optimality conditions in a control problem described by a system of Volterra type two-dimensional difference equations // ANA of Science. Transactions, issue math. series of phys.-tech. and math. science. Baku-2010, "ELM", XXX, № 4, pp. 111-122.
11. Amirova R.R., Mansimov K.B. Necessary optimality conditions of singular control in control problem for Volterra type two-dimensional difference equations // Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics. (Тбилиси) 2010-2011, vol. 31, pp. 41-50.
12. Амирова Р.Р., Мансимов К.Б. Об оптимальности особых управлений в задаче управления для двумерного разностного уравнения типа Вольтерра // Журнал Математическое и компьютерное моделирование. Украина. Серия физ.-мат. наук, 2012, вып. 6, с. 17-29.
13. Амирова Р.Р. Необходимые условия оптимальности в одной задаче управление для двумерного разностного уравнения типа Вольтерра // Докл. НАН Азербайджана. 2012, т. LXVIII, № 3, с. 3-8.
14. Амирова Р.Р., Мансимов К.Б. Об оптимальности квазиособых управлений в одной дискретной задаче оптимального управления //

Изв. НАН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 2012, № 6, с. 55-60.

15. Amirova R. On one non-smooth optimal control problem described by Volterra type of two-dimensional difference equation / IV International Conference "Problems of Cybernetics and Informatics". September 12-14, 2012, Baku, Azerbaijan, pp. 60-62.
16. Амирова Р.Р., Мансимов К.Б. Об оптимальности квазиособых управлений в одной задаче управления, описываемой системой нелинейных разностных уравнений типа Вольтерра // Докл. НАН Азербайджана. 2012, т. LXVIII, № 4, с. 3-9.
17. Амирова Р.Р., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в одной дискретной задаче оптимального управления // Автоматика и вычислительная техника. (г. Рига), 2013, № 1, с. 13-22.

АМИРОВА РАСМИЯ РЗА кызы
УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ,
ОПИСЫВАЕМЫЕ ОДНИМ КЛАССОМ РАЗНОСТНЫХ
УРАВНЕНИЙ

РЕЗЮМЕ

Диссертационная работа посвящена выводу условий оптимальности для двух типов задач оптимального управления. Рассматриваются задачи оптимального управления, описываемые двумерными разностными уравнениями являющимися разностным аналогом интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа с краевыми условиями Гурса, а также разностным аналогом двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра. Получены различные необходимые условия оптимальности первого порядка, исследованы случаи вырождения необходимых условий оптимальности первого порядка. В частности, в случае открытости области управления выведены необходимые условия оптимальности второго порядка.

В линейной задаче управления доказано необходимое и достаточное условие оптимальности в форме дискретного условия максимума.

AMIROVA RASMIYYA RZA QIZI

**OPTIMALITY CONDITIONS IN CONTROL PROBLEMS
DESCRIBED BY ONE CLASS OF DIFFERENCE EQUATIONS**

SUMMARY

Dissertational work is devoted to the derivation of optimality conditions for two type of optimal control problems. Reviewed an optimal control problem described by two-dimensional difference equations are differential equation integro-differential equations of hyperbolic type with boundary conditions of Goursat and difference analogue two-dimensional integral equations of Volterra type. Received various necessary optimality conditions of the first order, investigated cases of degeneration of necessary optimality conditions of the first order. Particularly, in the case of transparency management derived necessary optimality conditions of the second order.

In the linear control problem, proved a necessary and sufficient condition for optimality in the form of discrete maximum condition.