

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ  
АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ  
БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
НИИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**

---

*На правах рукописи*

**КЁНУЛ ШАМИЛ кызы ДЖАББАРОВА**

**НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ  
ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

**1214.01 – Динамические системы и оптимальное управление**

**АВТОРЕФЕРАТ**

**диссертации на соискание учёной степени  
доктора философии по математике**

**Баку - 2014**

Работа выполнена в отделе «Дифференциальные уравнения» Института Математики и Механики НАН Азербайджана.

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук,  
профессор **Г.Ф. Кулиев**

**Официальные оппоненты:**

доктор физико-математических наук, проф. **А.Б. Алиев**

кандидат физико-математических наук, проф. **К.Г. Гасанов**

**Ведущая организация:**

Азербайджанский Государственный Педагогический Университет,  
кафедра «Математический анализ».

Защита состоится «23 \_\_» \_\_09\_\_ 2014 г. в 14<sup>00</sup> часов на заседании Диссертационного Совета FD.02.017 при Бакинском Государственном Университете.

**Адрес:** AZ 1148, ул.З.Халилова, 23.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Бакинского Государственного Университета.

Автореферат разослан «\_\_» \_\_\_\_\_ 2014 года.

**Учёный секретарь  
Диссертационного Совета  
FD.02.017**

**д.т.н. М.М.Муталлимов**

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Задачи управления для уравнений с частными производными занимают важное место среди всех задач управления. Это, прежде всего, связано с тем, что уравнения с частными производными возникают в самых разнообразных областях физики, техники, механики, экономики, медицины, биологии и т.д. и исследование задач управления в процессах, описываемых такими управлениями, в частности, гиперболическими уравнениями, является потребностью науки и техники и поэтому оно актуально. Как известно, основными задачами теории управления является доказательство существования оптимального управления, вывод различных необходимых условий оптимальности и приближённое решение рассматриваемых задач оптимального управления. Наряду с этими, управляемость для линейных дифференциальных уравнений с частными производными тоже является важной задачей теории управления.

Отметим, что выше отмеченные задачи теории управления наиболее мало изучены для гиперболических уравнений. Это связано с тем, что качественная теория гиперболических уравнений достаточно сложно и задачи управления для таких уравнений сопровождаются соответствующими трудностями, присущими только таким уравнениям.

Впервые теоретическая постановка задач об управлении колебаниями была рассмотрена А.Г.Бутковским. Там же решена задача оптимального управления колебаниями струны, применением  $L$ -проблемы моментов. Систематическое изучение задач управляемости для гиперболических уравнений начиналось с работ J.-L.Lionsa, V.Komornik, R.Apolaya, В.А.Ильина и В.В.Тихомирова. Далее исследования продолжались в работах К.Г.Гасанова и Т.М.Гасанова, А.И.Егорова и Л.Н.Знаменской, В.А.Ильина, О.Ю.Эммануилова, Г.Ф.Кулиева и К.Ш.Джаббарово, Э.Зуаза. В работе В.А.Ильина и В.В.Тихомирова для уравнения колебаний струны ставилась задача управляемости с граничными управлениями и управляющие функции найдены в явном аналитическом виде, причём рассмотрена задача с граничными условиями первого рода. В работе R.Apolaya рассматривается задача точной управляемости для линейного однородного гиперболического уравнения

второго порядка. В работе Ж.Л.Лионса изучаются различные задачи управляемости и стабилизации для некоторых распределённых систем.

Известно, что задача управления с коэффициентами рассматриваемых уравнений с частными производными гиперболического типа представляет большой теоретический и практический интерес. Отметим, что такие задачи встречаются в различных приложениях – при оптимизации механических конструкций, при решении коэффициентных обратных задач. Сложность задач управления с управлением в коэффициентах во многом обусловлена их возможной неразрешимостью и при исследовании этих задач возникает ряд трудностей, связанных с их некорректностью и сильной нелинейностью. Задачи оптимального управления коэффициентами при старших производных гиперболических уравнений являются некорректными, когда управляющие коэффициенты принадлежат пространству существенно ограниченных функций. Поэтому приходится перейти к другим постановкам таких задач. Один из возможных подходов к решению таких задач связан с использованием гладких управлений.

В работах К.Р.Айдазаде, К.Б.Мансимова, С.С.Ахиева, В.П.Васильева, К.Г.Гасанова, А.Д.Искендерова, В.Комкова, Г.Ф.Кулиева, Ж.Л.Лионса, А.Дж.Мамедова, Т.Г.Меликова, М.Дж.Марданова, В.И.Плотникова, М.А.Садыгова, С.Я.Серовайского, Т.Г.Сиразетдинова, М.В.Сурияраяна, Р.Г.Тагиева, Я.А.Шарифова, Ш.Ш.Юсубова, М.А.Ягубова и др. рассмотрены различные задачи оптимального управления для гиперболических уравнений, доказаны теоремы существования оптимального управления и выведены различные необходимые условия оптимальности.

Диссертационная работа посвящена исследованию задач управляемости линейных гиперболических уравнений второго порядка и задачам оптимального управления с управлением в коэффициентах при старших производных и в правых частях слабо нелинейных и некоторых нелинейных гиперболических уравнений второго порядка – доказательству существования оптимального управления и выводу необходимых условий оптимальности в форме вариационных неравенств. На основе вышеизложенного, тема диссертационной работы считается актуальной.

**Цель работы.** Изучение задачи управляемости для линейных гиперболических уравнений второго порядка и исследование задач оптимального управления для некоторых нелинейных гиперболических уравнений второго порядка с управлением в коэффициентах при старших производных.

**Методы исследования.** В работе применяются методы теории уравнений с частными производными, функционального анализа, теории оптимального управления.

**Научная новизна.** В диссертации получены следующие результаты:

- 1) найден явный аналитический вид граничных управлений в задаче управляемости для уравнения колебаний струны с граничными условиями различного рода;
- 2) найден вид оптимального управления с помощью  $L$ -проблемы моментов в задаче оптимального управления для уравнения колебаний струны;
- 3) доказана теорема о точной управляемости и найдено значение такого момента времени, после которого линейное гиперболическое уравнение управляемо;
- 4) изучены задачи наблюдаемости для уравнения колебаний струны;
- 5) исследованы вопросы корректности постановки задачи и выведены необходимые условия оптимальности в форме вариационного неравенства для слабо нелинейного гиперболического уравнения с управлениями в коэффициентах при старших производных и в правой части уравнения;
- 6) исследованы вопросы существования оптимального управления и установлены необходимые условия оптимальности в форме вариационных неравенств для одного нелинейного гиперболического уравнения с управлением в коэффициентах при старших производных;
- 7) установлена связь между решением задачи оптимального управления и приближённым решением этой задачи для одного нелинейного гиперболического уравнения, выведено необходимое условие оптимальности для приближённого решения задачи.

**Теоретическая и практическая ценность.** Полученные в работе результаты носят, в основном, теоретический характер. Од-

нако, используемая в работе схема, может быть применена для исследования задач оптимального управления в системах, описываемых другими уравнениями с частными производными. Кроме того, полученные в работе результаты могут быть использованы при приближённом решении соответствующих задач управления.

**Апробация работы.** Полученные в диссертации результаты неоднократно докладывались на семинарах отдела «Дифференциальные уравнения» Института Математики и Механики НАН Азербайджанской Республики (рук. чл.-корр. НАНА, проф.Б.А.Искендеров), кафедры «Дифференциальные и интегральные уравнения» (рук. проф.Н.Ш.Искендеров) Бакинского Государственного Университета, кафедры «Математические методы теории управления» (рук. проф.М.А.Ягубов) Бакинского Государственного Университета, на конференции, посвящённой 90-летию член-корр. АН Азербайджанской Республики, проф.Г.Т.Ахмедова (Баку-2007 г.), на конференции, посвящённой 85-летию общенационального лидера Г.А.Алиева (Баку-2008 г.), на конференции, посвящённой 50-летию Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана (Баку-2009 г.).

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-10], данных в конце автореферата.

**Объём и структура работы.** Диссертация изложена на 112 страницах, состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы, содержащего 85 наименований.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обосновывается актуальность темы и приводятся основные результаты.

**Первая глава** работы состоит из четырёх разделов.

**В разделе 1.1** изучается задача граничного управления для уравнения  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$  колебаний струны за промежуток времени  $[0, T]$ , концами которой служат точки  $x = 0$  и  $x = l$ . При фиксированном  $t$  пару функций  $\left\{ u(x, t), \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right\}$  заданных на сегменте  $0 \leq x \leq l$  естественно называть состоянием системы в мо-

мент времени  $t$ . Предполагается, что в начальный момент времени  $t = 0$  смещение и скорость точек струны равны  $u(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x)$ , а в момент времени  $t = T$  смещение и скорость точек струны равны  $u(x, T) = \varphi_1(x)$ ,  $\frac{\partial u(x, T)}{\partial t} = \psi_1(x)$ , где  $\varphi(x), \varphi_1(x)$  и  $\psi(x), \psi_1(x)$  произвольные функции из классов  $W_2^2[0, 1]$  и  $W_2^1[0, l]$ , соответственно.

Ставится задача: найти явный аналитический вид граничных управлений на концах струны  $u(0, t) = \mu(t)$ ,  $\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \nu(t)$ , принадлежащих классам  $W_2^2[0, T]$  и  $W_2^1[0, T]$ , и обеспечивающих переход колебательного процесса из состояния  $\{\varphi(x), \psi(x)\}$  при  $t = 0$  в состояние  $\{\varphi_1(x), \psi_1(x)\}$  при  $t = T$ .

В этом разделе получен следующий результат.

**Теорема 1.** Для того, чтобы для наперед заданных четырёх функций  $\varphi \in W_2^2[0, l]$ ,  $\psi \in W_2^1[0, l]$ ,  $\varphi_1 \in W_2^2[0, l]$ ,  $\psi_1 \in W_2^1[0, l]$  существовали граничные управления  $\mu(t)$  и  $\nu(t)$  из классов  $W_2^2[0, 1]$  и  $W_2^1[0, l]$  соответственно, обеспечивающие удовлетворение решения  $u(x, t)$  из  $\hat{W}_2^2[Q_l]$  смешанной задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{в } Q_T \equiv [0, l] \times [0, T], \quad (1)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \nu(t) \quad \text{при } 0 \leq t \leq l, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) \quad \text{при } 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

условиям

$$u(x, l) = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial u(x, l)}{\partial t} = \psi_1(x) \quad \text{при } 0 \leq x \leq l,$$

и подчинённые условиям согласования с функциями  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  при  $t = 0$ , и с функциями  $\varphi_1(x)$  и  $\psi_1(x)$  при  $T = l$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись три требования:

$$\psi(0) - \varphi'(0) - \psi_1(l) + \varphi_1'(l) = 0,$$

$$\psi(l) - \varphi'(l) - \psi_1(0) - \varphi_1'(0) = 0,$$

$$\int_0^l \psi(x) dx + \varphi(l) + \int_0^l \psi_1(x) dx - \varphi_1(0) = 0.$$

При выполнении указанных трёх требований граничные управления  $\mu(t)$  и  $\nu(t)$  имеют вид:

$$\mu(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \psi(x) dx + \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2} \varphi(0) + \frac{1}{2} \int_{l-t}^l \psi_1(x) dx -$$

$$-\frac{1}{2} \varphi_1(l) + \frac{1}{2} \varphi_1(l-t),$$

$$\nu(t) = \frac{1}{2} \psi_1(t) + \frac{1}{2} \varphi_1'(t) - \frac{1}{2} \psi(l-t) + \frac{1}{2} \varphi'(l-t).$$

**Раздел 1.2** диссертации посвящён применению  $L$  - проблемы моментов к решению следующей задачи оптимального управления:

Требуется найти такие граничные управления из  $W_2^1[0, T]$  и  $L_2[0, T]$ , которые приводят начальное состояние  $\{\varphi(x), \psi(x)\}$  (где  $\varphi \in W_2^1[0, l]$ ,  $\psi \in L_2[0, l]$ ) струны в конечном нулевом состоянии  $\{0; 0\}$  в момент времени  $T$ , т.е.  $u(x, T) = 0$ ,  $\frac{\partial u(x, T)}{\partial t} = 0$  и одновременно доставляющие минимальное значение функционалу

$$J(v) = \int_0^T [\mu^2(t) + \nu^2(t)] dt, \quad (5)$$

где  $v(t) = (\mu(t), \nu(t))$ .

В этом разделе доказана

**Теорема 2.** Пусть  $\varphi \in W_2^1[0, l]$ ,  $\psi \in L_2[0, l]$  и  $T = 2l$ . Тогда решение задачи оптимального управления (1)-(3), (5) определяется выражениями

$$\mu(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{l} \frac{\alpha_k}{1 + \alpha_k^2} \cdot \varphi_k \cdot \sin \frac{\pi(2k-1)}{2l} t - \frac{\alpha_k}{1 + \alpha_k^2} \frac{2}{\pi(2k-1)} \cdot \psi_k \cdot \cos \frac{\pi(2k-1)}{2l} t \right],$$

$$\nu(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{l} \frac{\alpha_k}{1 + \alpha_k^2} \cdot \sin \frac{\pi(2k-1)}{2l} t - \frac{2\psi_k}{(1 + \alpha_k^2)\pi(2k-1)} \cdot \cos \frac{\pi(2k-1)}{2l} t \right],$$

$0 \leq t \leq 2l$ ,

где

$$\varphi_k = \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi(2k-1)}{2l} x dx, \quad \psi_k = \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi(2k-1)}{2l} x dx,$$

$$\alpha_k = \frac{2l(-1)^k}{\pi(2k-1)}.$$

**В разделе 1.3** рассматривается задача точной управляемости в процессах, описываемых линейным гиперболическим уравнением второго порядка с граничным управлением.

Пусть процесс описывается начально-краевой задачей в цилиндре  $Q_T = \Omega \in (0, T)$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (6)$$

$$u|_S = \nu(x, t), \quad (x, t) \in S_T, \quad (7)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x), \quad x \in \Omega. \quad (8)$$

Задача точной управляемости для (6)-(8) формулируется следующим образом: для заданного  $T$  найти такое гильбертово пространство  $H$ , что для каждой начальной пары  $\{u_0, u_1\} \in H$  суще-

ствует управление  $\nu \in L_2(S)$ , такое, что для решения задачи (6)-(8) выполняются условия стабилизации:

$$u|_{t=T} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=T} = 0. \quad (9)$$

В этом разделе доказывается

**Теорема 3.** Пусть  $T > T_0$ . Тогда для каждой пары  $\{u_0, u_1\} \in L_2(\Omega) \times W_2^{-1}(\Omega)$  существует управление  $\nu \in L_2(S_T)$ , такое, что решение задачи (6)-(8) удовлетворяет условиям стабилизации (9), где  $T_0$  определяется данными задачи (6)-(8).

**В разделе 1.4** диссертации рассматривается задача наблюдаемости колебаний струны. Пусть процесс описывается краевой задачей:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

в которой  $\varphi(x) \in W_2^1[0, 1]$  и  $\psi(x) \in L_2[0, 1]$  - неизвестные функции, определяющие начальное состояние объекта. Предполагается, что результаты наблюдения заданы функцией  $z(t) \in L_2(0, T)$ , которая связана с  $u(x, t)$  соотношением

$$\frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = z(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

и даёт некоторую информацию о состоянии струны. Требуется определить момент времени  $T > 0$  и соответствующие ему функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ , определяющие решение  $u(x, t)$  этой краевой задачи. Показано, что время, необходимое для наблюдения за колебаниями струны  $T = 1$ , а

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \pi n x, \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \pi n x,$$

где

$$\varphi_n = \frac{2(-1)^n}{\pi n} \int_0^1 z(t) \sin \pi n t dt, \quad \psi_n = 2(-1)^n \int_0^1 z(t) \sin \pi n t dt.$$

**Глава II** диссертации, состоящая из трёх разделов, посвящена доказательству теорем существования оптимального управления и выводу необходимых условий оптимальности в нелинейных гиперболических системах с управлением в коэффициентах при старших производных.

**В разделе 2.1** изучается задача о минимуме функционала

$$J(v) = \int_{Q_T} f_0(x, t, u(x, t), v(x, t)) dx dt \quad (10)$$

при ограничениях

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( v_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f(x, t, u, v_0(x, t)) \quad (x, t) \in Q_T, \quad (11)$$

$$u|_{S_T} = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad x \in \Omega, \quad (12)$$

где  $\varphi_0 \in W_2^1(\Omega)$ ,  $\varphi_1 \in L_2(\Omega)$  - заданные функции,  $f_0(x, t, u, v)$  и  $f(x, t, u, v_0)$  - заданные функции Каратеодори в областях  $Q_T \times R \times U$  и  $Q_T \times R \times [v_0, \mu_0]$  соответственно,  $U = \{v = (v_1, \dots, v_n), v_0) \in R^{n+1} \mid 0 < v_i \leq v_i \leq \mu_i, i = 1, \dots, n, v_0 \leq v_0 \leq \mu_0\}$ , где  $v_i, \mu_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) - заданные числа,  $v = v(x, t) = (v_1(x), \dots, v_n(x), v_0(x, t))$  - управление,  $u = u(x, t) = u(x, t, v)$  - решение задачи (11), (12) соответствующее управлению  $v(x, t)$ .

Пусть  $B = W_{p_1}^1(\Omega) \times \dots \times W_{p_n}^1(\Omega) \times W_{p_0}^1(Q_T)$ , где  $p_i, p_0$  - заданные числа, причём  $p_i > n$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $p_0 > n + 1$ . В пространстве  $B$  вводится множество допустимых управлений

$$V = V_1 \times \dots \times V_n \times V_0,$$

где

$$V_i = \left\{ v_i(x) \in W_{p_i}^1(\Omega) \mid 0 < v_i \leq v_i(x) \leq \mu_i \text{ п.в. на } \Omega, \right.$$

$$\left. \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L_{p_i}(\Omega)} \leq \gamma_{ij} \quad (j = 1, \dots, n) \right\} \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$V_0 = \left\{ v_0(x, t) \in W_{p_0}^1(Q_T) \mid v_0 \leq v_0(x, t) \leq \mu_0 \text{ п.в. на } Q_T, \right.$$

$$\left. \left\| \frac{\partial v_0}{\partial x_j} \right\|_{L_{p_0}(Q_T)} \leq \rho_j \quad (j = 1, \dots, n), \left\| \frac{\partial v_0}{\partial t} \right\|_{L_{p_0}(Q_T)} \leq \rho \right\}.$$

Здесь  $\gamma_{ij}, \rho_j, \rho > 0$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) - заданные числа. Пусть выполняются

**Условие А:** функция  $f(x, t, u, v)$  удовлетворяет условию Липшица по  $u$  с постоянным  $M_1 > 0$  при п.в.  $(x, t) \in Q_T$  и для всех  $v_0 \in [v_0, \mu_0]$  и кроме того существует такая функция  $a(x, t) \in L_2(Q)$ , что для п.в.  $(x, t) \in Q_T$  и для всех  $v_0 \in [v_0, \mu_0]$  имеет место

$$|f(x, t, 0, v)| \leq a(x, t).$$

**Условие В:** существует такая функция  $a_0(x, t) \in L_1(Q_T)$  и постоянная  $M_2 > 0$ , что для всех  $u \in R, v \in U$  имеет место

$$|f_0(x, t, u, v)| \leq a_0(x, t) + M_2 |u|^2.$$

Далее для задачи оптимального управления (10)-(12), доказывается следующая

**Теорема 4.** Пусть выполнены условия при постановке задачи (10)-(12) и условия А, В. Тогда множество оптимальных управлений  $V_* = \{u_* \in V : J(u_*) = \inf J(v) \mid v \in V\}$  в задаче (10)-(12) непусто,  $V_*$  слабо компактно в  $B$  и любая минимизирующая последовательность  $\{v^{(k)}\} \subset V$  слабо в  $B$  сходится к множеству  $V_*$ .

Далее в этом разделе исследуется дифференцируемость функционала (10) при некоторых дополнительных условиях дифференцируемости функций  $f(x, t, u, v_0)$  и  $f(x, t, u, v)$ .

Для задачи (10)-(12) вводится сопряженное состояние  $\psi = \psi(x, t, v)$ , как решение задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( v_i(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial f(x, t, u, v_0)}{\partial u} \psi = \\ = \frac{\partial f_0(x, t, u, v)}{\partial u}, \quad (x, t) \in Q_T, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\psi|_{S_T} = 0, \quad \psi|_{t=T} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega. \quad (14)$$

**Теорема 5.** Функционал (10) непрерывно дифференцируем по Фреше на  $V$  и его дифференциал в точке  $u_* \in V$  при приращении  $\Delta u = (\Delta u_1, \dots, \Delta u_n, \Delta u_0) \in B$  определяется выражением

$$\langle J'(v_*), \Delta u \rangle = \int_{Q_T} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u_*}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_*}{\partial x_i} + \frac{\partial f_0}{\partial v_i} \right) \Delta v_i + \left( \frac{\partial u_*}{\partial v_0} \frac{\partial f}{\partial v_0} \psi_* \right) \Delta v_0 \right] dx dt$$

где  $\psi_* = \psi(x, t, v_*)$  решение сопряженной задачи (13), (14) при  $v = v_*$ , а  $\langle J'(v_*), \Delta u \rangle$  означает значение функционала  $J'(v_*)$  на элементе  $\Delta u$ .

Далее доказана

**Теорема 6.** Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда для оптимальности управления  $v_* = (v_{1*}, \dots, v_{n*}, v_{0*}) \in V$  в задаче (10)-(12) необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u_*}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_*}{\partial x_i} + \frac{\partial f_0(x, t, u_*, v_*)}{\partial v_i} \right) (v_i(x) - v_{i*}(x)) + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial f_0(x, t, u_*, v_*)}{\partial v_0} + \frac{\partial f(x, t, u_*, v_*)}{\partial v_0} \psi_*(x, t) \right) \times \right. \\ \left. \times (v_0(x, t) - v_{0*}(x, t)) \right] dx dt \geq 0 \end{aligned}$$

для любого  $v \in V$ , где  $u_* = u(x, t, v_*)$ ,  $\psi_* = \psi(x, t, v_*)$  - решения задач (11), (12) и (13), (14) при  $v = v_*$ .

**В разделе 2.2** диссертации рассматривается следующая задача оптимального управления: найти минимум функционала

$$I(v) = \frac{\alpha}{2} \|v\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \int_{Q_T} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial(u - u_d)}{\partial x_i} \right|^2 dx dt \quad (15)$$

при ограничениях

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + |u|^\rho u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (16)$$

$$u|_{S_T} = 0, \quad u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (17)$$

управление  $v(x)$  выбирается из множества  $V = \{v \in W_2^1(\Omega) \mid 0 < a \leq v(x) \leq b, \text{ п.в. на } \Omega\}$ . Предполагается, что  $0 < \rho \leq \frac{2}{n-2}$ ,  $n \geq 3$  и  $\rho$  произвольно и конечно при  $n = 2, \alpha > 0, a > 0, b > 0$ .

заданные числа,  $f \in L_2(Q_T)$ ,  $\varphi_0 \in \dot{W}_2^1(\Omega) \cap L_p(\Omega)$ ,  $p = \rho + 2$ ,  $\varphi_1 \in L_2(\Omega)$  - заданные функции.

В этом разделе, в частности, доказаны следующие утверждения.

**Теорема 7.** Задача (15)-(17) разрешима.

**Теорема 8.** При  $\rho \leq \frac{2}{n-2}$  решение задачи (15)-(17)  $v_0(x)$

удовлетворяет вариационному неравенству

$$\begin{aligned} \alpha \int_{\Omega} \left[ v_0(v - v_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_0}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} - \frac{\partial v_0}{\partial x_i} \right) \right] dx - \\ - \int_{Q_T} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \cdot (v - v_0) dx dt \geq 0 \quad \forall v \in V, \end{aligned}$$

где  $\psi(x, t)$  - решение следующей сопряженной задачи:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( v_0 \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) + (\rho + 1) |u_0|^\rho \psi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 (u_0 - u_d)}{\partial x_i^2}, \quad (x, t) \in Q_T,$$

$$\psi|_{S_T} = 0, \quad \psi(x, T) = 0, \quad \frac{\partial \psi(x, T)}{\partial t} = 0, \quad x \in \Omega,$$

а  $u_0(x, t)$  решение задачи (16), (17) – соответствующее управлению  $v_0(x) \in V$ .

**В разделе 2.3** рассматривается задача оптимального управления с управлением в коэффициентах при старших производных для одного нелинейного гиперболического уравнения при отсутствии теоремы единственности решения краевой задачи.

В цилиндре  $Q_T = \Omega \times (0, T)$  рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( v(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + |u|^\rho u = f(x, t), \quad (18)$$

с начально-краевыми условиями

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \quad x \in \Omega, \quad u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S_T, \quad (19)$$

где  $f \in L_2(Q_T)$ ,  $\varphi_0 \in \dot{W}_2^1(\Omega) \cap L_p(\Omega)$ ,  $\varphi_1 \in L_2(\Omega)$  – известные функции,  $p = \rho + 2$ ,  $\rho > 0$ . Управление  $v(x, t)$  выбирается из множества

$$V = \left\{ v \in W_2^1(Q_T) \mid 0 < a \leq v(x, t) \leq b, \left| \frac{\partial v(x, t)}{\partial x_i} \right| \leq M_i, \right. \\ \left. i = 1, \dots, n, \left| \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right| \leq M \text{ п.в. на } Q \right\},$$

где  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $M_i > 0$ ,  $M > 0$  – заданные числа.

Зададим множество  $U_d$  допустимых пар системы (18), (19), состоящее из таких пар  $y = (v, u) \in V \times Y$ , которые удовлетворяют

$$\text{этим равенствам, где } Y = \left\{ u : u \in Y_0, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in Y_1 \right\},$$

$$Y_0 = \left\{ u \mid u \in L_\infty(0, T; \dot{W}_2^1(\Omega) \cap L_p(\Omega)), \frac{\partial u}{\partial t} \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \right\},$$

$$Y_1 = L_2(Q_T) + L_\infty(0, T; W_2^{-1}(\Omega) + L_{p'}(\Omega)), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Определим функционал

$$I(v, u) = \frac{\alpha}{2} \int_{Q_T} \left[ v^2(x, t) + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial v(x, t)}{\partial x_i} \right)^2 \right] dx dt + \\ + \int_Q \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial (u - u_d)}{\partial x_i} \right|^2 dx dt, \quad (20)$$

где  $\alpha > 0$  – заданное число,  $u_d \in L_\infty(0, T; \dot{W}_2^1(\Omega))$  – заданная функция. Ставится задача: найти допустимую пару, минимизирующую функционал  $I(v, u)$  на множестве  $U_d$ . Эту задачу назовём задачей (18)-(20).

В этом разделе доказывается

**Теорема 9.** Задача (18)-(20) разрешима.

Далее рассматривается приближённое решение этой задачи.

Определим функционал

$$I_m(v, u) = I(v, u) + \frac{1}{2\varepsilon_m} \int_{Q_T} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( v \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + |u|^\rho - f \right]^2 dx dt,$$

где  $\{\varepsilon_m\}$  такая числовая последовательность, что  $\varepsilon_m > 0$  и  $\varepsilon_m \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ . Ставится следующая задача: найти допустимую пару, минимизирующую функционал  $I_m(v, u)$  на множестве пар  $v \in V$ ,  $u \in Y$  при выполнении условий (19). Эту задачу обозначим через  $P_m$ .

В этом разделе получены следующие результаты:

**Теорема 10.** Задача  $P_m$  разрешима.

**Теорема 11.** При  $m \rightarrow \infty$  имеет место сходимость

$$\lim_{m \rightarrow \infty} I_m(y_m) = \min_{(v, u) \in V \times Y} I(v, u) \equiv \min I(U_d).$$

Наконец, в этом разделе выведено следующее необходимое условие оптимальности для задачи  $P_m$ .

**Теорема 12.** Решение задачи  $P_m$  определяется соотношения-

ми

$$\int_{Q_T} \left\{ \alpha \left[ v_m(v - v_m) + \frac{\partial v_m}{\partial t} \frac{\partial(v - v_m)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \frac{\partial(v - v_m)}{\partial t} \right] - \right. \\ \left. - \psi_m \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( (v - v_m) \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \right\} dx dt \geq 0 \quad \forall v \in V,$$

где  $u_m(x, t)$ ,  $\psi_m(x, t)$  являются решениями следующих краевых задач:

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( v_m \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) + |u_m|^\rho u_m = f + \varepsilon \psi_m, \quad (x, t) \in Q_T,$$

$$u_m(x, t)|_{S_T} = 0, \quad u_m(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u_m(x, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \quad x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( v_m \frac{\partial \psi_m}{\partial x_i} \right) + (\rho + 1) |u_m|^\rho \psi_m = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 (u_m - u_d)}{\partial x_i^2}, \quad (x, t) \in Q_T,$$

$$\psi_m(x, t)|_{S_T} = 0, \quad \psi_m(x, T) = 0, \quad \frac{\partial \psi_m(x, T)}{\partial t} = 0, \quad x \in \Omega.$$

Согласно теореме 11 при достаточно больших значениях  $m$  соответствующая пара  $(v_m, u_m)$  оказывается ослабленным приближенным решением задачи, т.е. значение функционала  $I$  на ней будет сколь угодно близко к минимуму функционала  $I$  на множестве  $U_d$ .

В заключение, пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю – доктору физико-математических наук, профессору Г.Ф.Кулиеву за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

**Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:**

1. Кулиев Г.Ф., Джаббарова К.Ш. Решение задачи граничного оптимального управления с помощью метода  $L$ -проблемы моментов / Материалы конференции, посвящённой 90-летию член-корр. АН Азербайджана, проф. К.Т.Ахмедова, Баку, 2007, с.57-58.
2. Jabbarova K.Sh. A boundary control problem for a string vibrations equation. I // Trans. of NAS Azerbaijan, Math. and tech. series of physical-techn. and math. sciences, 2007, №7, p.185-190.
3. Кулиев Г.Ф., Джаббарова К.Ш. Задача стартового управления для уравнения колебаний струны / Материалы Республиканской конференции, посвящённой 85-летию общенационального лидера Г.А.Алиева, Баку, 2008, с.67.
4. Jabbarova K.Sh. Boundary control problem for string vibrations equation. II // Trans. of NAS Azerbaijan, Math. and tech. series of physical-techn. and math. sciences, 2008, №1, p.155-164.
5. Kuliyeve H.F., Jabbarova K.Sh. Application of the  $L$ -problem of moments to the solution of optimal control problem for string vibrations equation // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, vol.XXIX (XXXVII), 2008, p.97-106.
6. Кулиев Г.Ф., Джаббарова К.Ш. О задаче наблюдаемости колебаний струны / Тезисы конференции, посвящённой 50-летию Института Математики и Механики НАН Азербайджана, Баку, 2009, с.176.
7. Кулиев Г.Ф., Джаббарова К.Ш. Задача оптимального управления с управлением в коэффициентах при старших производных для нелинейного гиперболического уравнения // Вестник Бакинского Университета, серия физ.-мат. наук, 2010, №4, с.22-29.
8. Kuliyeve H.F., Jabbarova K.Sh. The exact controllability problem for the second order linear hyperbolic equation // Journal of Differential Equation and control processes, 2010, №3, p.10-19.
9. Kuliyeve H.F., Jabbarova K.Sh. Optimal control problem with a control of the high coefficients for the nonlinear hyperbolic equation without uniqueness theorem of solution of initial-

boundary value problem // Trans. of NAS Azerbaijan, Math. and tech. series of physical-techn. and math. sciences, vol.XXX, 2010, №4, p.97-104.

10. Kuliyeu H.F., Jabbarova K.Sh. On an optimal control for weakly nonlinear hyperbolic equations // Acta Mathematica Hungarica, 2011, 131 (3), p.197-207.

**KÖNÜL ŞAMİL qızı CABBAROVA**

## **İKİTƏRTİBLİ HİPERBOLİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN İDARƏETMƏNİN BƏZİ MƏSƏLƏLƏRİ**

### **XÜLASƏ**

Dissertasiya işi ikitərtibli xətti hiperbolik tənliklər üçün idarəolunma məsələlərinin və yüksək tərtib törəmələrinin əmsallarında və sağ tərəfində idarəedicilər olan zəif qeyri-xətti ikitərtibli hiperbolik tənliklər üçün optimal idarəetmə məsələlərinin tədqiqinə həsr olunmuşdur.

İşdə aşağıdakı nəticələr alınmışdır:

- müxtəlif növ sərhəd şərtləri olan simin rəqsləri tənliyi üçün idarəolunma məsələsində sərhəd idarəedicilərin aşkar analitik şəkli tapılmışdır;
- simin rəqsləri tənliyi üçün optimal idarəetmə məsələsində  $L$  - moment üsulunun köməyiylə optimal idarəedicinin ifadəsi tapılmışdır;
- dəqiq idarəolunma haqqında teorem isbat edilmiş və zamanın elə anı tapılmışdır ki, ondan sonra xətti hiperbolik tənlik idarəolunandır;
- simin rəqsləri tənliyi üçün müşahidə məsələsi öyrənilmişdir;
- yüksək tərtib törəmələrinin əmsallarında və tənliyin sağ tərəfində idarəediciləri olan zəif qeyri-xətti hiperbolik tənlik üçün məsələnin qoyuluşunun korrektiliyi tədqiq olunub və variasional bərabərsizlik şəklində optimallığın zəruri şərti çıxarılmışdır;
- yüksək tərtib törəmələrinin əmsallarında idarəedicisi olan bir qeyri-xətti hiperbolik tənlik üçün optimal idarəedicinin varlığı məsələsi tədqiq olunub və variasional bərabərsizlik şəklində optimallığın zəruri şərti çıxarılmışdır;
- bir qeyri-xətti hiperbolik tənlik üçün optimal idarəetmə məsələsinin həlli ilə bu məsələnin təqribi həlli arasında əlaqə verilib, məsələnin təqribi həlli üçün optimallığın zəruri şərti çıxarılmışdır.

**KONUL SHAMIL kizi JABBAROVA**

**SOME CONTROL PROBLEMS FOR THE SECOND ORDER  
HYPERBOLIC EQUATIONS**

**SUMMARY**

The thesis is dedicated to the investigation of the controllability problems for the second order linear hyperbolic equations and optimal control problems for the weak nonlinear second order hyperbolic equations with controls at the high derivatives and right hand side.

The following main results have been obtained in the thesis:

- explicit analytical form is found for the controllability problem for the string vibration equation with various boundary conditions;
- optimal control is found by the  $L$ -moments problem in the optimal control problem for the string vibration equation;
- a theorem is proved on the exact controllability for the second order hyperbolic equation. A time moment is found, from which the equation is controllable;
- the observation problem is studied for the string vibration equation;
- the correctness of the optimal control problem is investigated in the equation with controls at the high derivatives and right hand side. A necessary condition is derived in the form of variation inequalities;
- existence of the optimal control is studied and necessary optimality condition is derived in the form of variational inequality for the non-linear hyperbolic equation with controls at the controls at the high derivatives;
- a relation is established between solution and approximate solution of the optimal control problem for the non-linear hyperbolic equation. A necessary optimality condition is derived for the approximate solution of this problem.

**AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ  
BAKİ DÖVLƏT UNİVERSİTETİ  
TƏTBİQİ RİYAZİYYAT ELMİ TƏDQİQAT İNSTİTUTU**

*Əlyazması hüququnda*

**KÖNÜL ŞAMİL QIZI CABBAROVA**

**İKİTƏRTİBLİ HİPERBOLİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN  
İDARƏETMƏNİN BƏZİ MƏSƏLƏLƏRİ**

**1214.01– Dinamik sistemlər və optimal idarəetmə**

**riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi  
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın**

**AVTOREFERATI**

**Bakı – 2014**