

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
İDARƏETMƏ SİSTEMLƏRİ İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

MƏHƏMMƏD MƏHƏRRƏM OĞLU ƏLİYEV

TAMƏDƏDLİ PROQRAMLAŞDIRMA MƏSƏLƏLƏRİNİN
SUBOPTİMAL HƏLLİNİN
HƏNDƏSİ ÜSULLARLA TAPILMASI

1203.01- Kompüter elmləri

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı - 2014

İş Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası İdarəetmə Sistemləri İnstitutunda yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
M.H.Yaqubov

Rəsmi opponentlər: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
T.Q.Məlikov

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru, dosent
Ə.Ə.Babayev

Aparıcı təşkilat: Azərbaycan Pedaqoji Universitetinin Riyaziyyat kafedrası

Müdafiə ___30/05___ 2014-cü il tarixdə saat 15:00-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının İdarəetmə Sistemləri (Kibernetika) İnstitutunun nəzdindəki D.01.121 Dissertasiya Şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Ünvan: AZ 1141, Bakı ş., B. Vahabzadə küçəsi, 9.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının İdarəetmə Sistemləri (Kibernetika) İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar

Avtoreferat ”___” _____ 2014-cü il tarixdə göndərilmişdir.

D01.121 Dissertasiya şurasının elmi katibi,
riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru

Ə.B.Paşayev

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı. Müasir dövrdə riyaziyyatın və hesablama texnikasının müvəffəqiyyətli inkişafı texniki və iqtisadi proseslərin tədqiqinə və idarə olunmasına daha geniş tətbiq edilir. Buna riyaziyyatın yeni və inkişafda olan sahələri riyazi proqramlaşdırma, oyunlar nəzəriyyəsi və həmçinin yüksək texniki imkanları olan elektron hesablama maşınlarının yaradılması geniş imkan açır.

Riyaziyyat elminin müəyyən çoxluqda təyin olunmuş funksiyanın, bu çoxluqda ekstremal qiymətinin tapılması məsələləri ilə riyazi proqramlaşdırma məşğul olur. Riyazi proqramlaşdırmanın xətti funksiyanın, xətti bərabərsizliklərlə və xətti tənliklərlə verilmiş çoxluqda şərti ekstremumunun tapılması problemi isə xətti proqramlaşdırmaya aiddir. Xətti proqramlaşdırma məsələləri iqtisadi və texniki tələbatın təsiri nəticəsində XIX əsrin ortalarında meydana gəlmişdir. XX əsrin 30-cu illərində sürətlə inkişaf etməyə başlamışdır. Ümumi şəkildə xətti proqramlaşdırma məsələsini ilk dəfə tədqiq edənlərdən biri məşhur riyaziyyatçı Con Fon Neyman, digəri isə, Nobel mükafatı laureatı L.V.Kantoroviç olmuşdur. Xətti proqramlaşdırma məsələlərinin əsas həll üsulu simpleks üsul C.Dansiq tərəfindən verilmişdir.

Xətti proqramlaşdırma məsələlərinin həllinə tamədədlik şərti əlavə edildikdə bu məsələlər kombinator məsələlərə çevrilir və çətin həll edilən məsələlər sinfinə daxil olur.

M.Minu özünün “Riyazi proqramlaşdırma” kitabında tamədədli proqramlaşdırma haqqında yazılmışdır. “Söhbət riyazi proqramlaşdırmanın daha çox zəngin və fəal inkişaf edən hissəsindən gedir. Qomorinin 1958-ci ildə külli miqdarda apardığı tədqiqatların nəşrindən sonra bu sahənin nə qədər vacib, nə qədər çətin və tətbiq sahələrinin çox olduğu məlum oldu”.

Tamədədli proqramlaşdırma məsələlərinin təxminən bir əsrdən çox zaman ərzində tədqiq edilməsinə baxmayaraq, bu məsələləri dəqiq, polinomial, determinə edilmiş alqoritm ilə həll etmək mümkün olmamışdır. Belə səbəblərə görə bu məsələlərin tədqiqi indi də öz aktuallığını saxlayır.

İşin məqsədi. İşin əsas məqsədi həndəsi üsullarla tamədədli xətti proqramlaşdırma məsələlərinin suboptimal həllərini tapmaq üçün yeni üsullar və alqoritmlər işləyib hazırlamaqdır. NP-tamamlanmış sinfə daxil olan SSP (*Subset Sum Problem*) üçün effektiv polinomial üsul tapmaqdır.

Tədqiqat üsulları. İşdə analitik həndəsə, məntiq və sistemli yanaşma üsullarından, xətti cəbr, riyazi proqramlaşdırma, maşın proqramlaşdırması aparatlarından istifadə edilmişdir.

Elmi yeniliklər:

1. İlk dəfə analitik həndəsə üsulları yüksək səviyyədə tamədərli proqramlaşdırma məsələlərinin tədqiqinə tətbiq edilmişdir.
2. Bu məsələlərin təyin oblastını özündə saxlayan n -ölçülü kub ətraflı tədqiq edilmiş və tamədərli xətti proqramlaşdırma məsələlərinin və kombinator məsələləri həlli onların hiperqövs üzərində həllinə gətirilmişdir.
3. Hiperqövs üzərində məsələnin varlığı kriterisi tapılmışdır.
4. Tapılan başlanğıc nöqtədən istifadə edərək həllə yaxınlaşan ardıcılıq konstruksiya edilmişdir.
5. Alt cəmlər çoxluğu (SSP) məsələsi üçün tapılan həllin optimal həll olmasının zəruri və kafi şərti analitik üsulla isbat edilmişdir.
6. Ümumi halda tapılan həllin tamədərli xətti proqramlaşdırma məsələsinin dəqiq həlli olmasının nəzəri olaraq zəruri və kafi şərti isbat edilmişdir.
7. Tapılan həllin ümumi şəkildə verilmiş tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsinin həlli olmasının zəruri şərti analitik üsulla isbat edilmişdir.
8. Həndəsi üsullar çanta məsələsinin, ümumi şəkildə verilmiş tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsinin, ümumiləşmiş təyinat məsələsinin və kommivoyajer haqqında məsələnin suboptimal həllərinin tapılmasına tətbiq edilmişdir.

İşin nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. İşin nəzəri əhəmiyyəti ondan ibarətdir ki, tam ədədli və kombinator məsələlərin həlli üçün vahid yanaşma ilə yeni üsul verilmişdir. Bu sinfə daxil olan məsələlərin dəqiq həndəsi interpretasiyası verilmişdir.

Xətti-diskret və buna ekvivalent olan modellərlə ifadə edilən texniki, iqtisadi, idarəetmə prosesləri üçün yeni həll üsulları və yanaşma tərzli işlənib hazırlanmışdır.

İşin aprobasiyası. Dissertasiya işinin nəticələri haqqında AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun konfranslarında, AMEA Kibernetika İnstitutunun seminarlarında, BDU-nun Tətbiqi Riyaziyyat İnstitutunun seminarlarında, BDU-nun AMEA-nın müxbir üzvü Y.C.Məmmədovun 75 illiyinə həsr edilmiş konfransında, PCI 2010 beynəlxalq konfransında, İslamabadda keçirilən VI ICMSEM beynəlxalq konfransında məruzələr edilmiş və məqalələr çap edilmişdir.

Çap edilmiş elmi əsərlər. Dissertasiya işinin mövzusu üzrə 16 elmi iş çap edilmişdir ki, bunlardan altısı məqalə, üçü monoqrafiya, yeddisi isə tezisdur.

İşin quruluşu və həcmi. Dissertasiya işi giriş, dörd fəsil, nəticə, istifadə olunmuş ədəbiyyat siyahısı və əlavələrdən ibarət olub 123 səhifədir.

DISSERTASIYA İŞİNİN ƏSAS MƏZMUNU

Girişdə bu sahədə aparılan tədqiqatlar haqqında qısa məlumat verilmiş, problemin aktuallığı əsaslandırılmış və iş haqqında məlumat verilmişdir. Göstərilmişdir ki, hesablama riyaziyyatında həll edilən bütün məsələlər iki sinfə ayrılır: 1) Həlli üçün lazım olan sadə əməllərin (toplama, çıxma, vurma, bölmə, müqayisə, kvadrat kök) sayı, məsələnin parametrləri (məchulların sayı n , məhdudiyyətlərin sayı $-m$) ilə polinomial ifadə edilən məsələlər $-P$ sinfi; 2) Həllərinə 2^n -lə mütənasib əməliyyat lazım olan məsələlər sinfi $-NP$ (*non-polinomial*) sinfi adlanır. P -sinfinə – asan həll olunan məsələlər sinfi, NP -sinfinə isə çətin həll olunan məsələlər sinfi də deyilir.

Tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsi də NP sinfinə daxil olan çətin həll olunan məsələlərdən biridir.

Edvard M. Reinqold, Yurq Niverqelt və Narasing Deo “Kombinator alqoritmlər” kitabında NP -sinfi haqqında yazmışlar: “ NP məsələləri üçün polinomial alqoritmlərin olmasının nəticələri dramatikdir. Bu NP və P siniflərinin üst-üstə düşməsi demək olardı ki, istənilən məsələ polinomial vaxta həll olunardı, determinə edilmiş alqoritmlə, determinə olunmuş zamanda bütün məsələlər həll edilə bilərdi. Bu həddindən çox təəccüblü olardı. Bu isə NP -çətin və NP -tamamlanmış məsələlərin həlli üçün polinomial alqoritmın varlığının əleyhinə çox güclü arqumentdir”.

Girişdə NP -çətin və NP -tamamlanmış məsələ anlayışları haqqında ətraflı məlumat verilmişdir.

Birinci fəsildə bir sıra köməkçi materiallar verilmiş və çanta məsələsinin nümunəsində tamədədli xətti proqramlaşdırılma məsələsinin həllinə bir yanaşma göstərilmişdir.

1.1-də bir sıra həndəsi anlayışlar n -ölçülü fəzalar üçün genişləndirilmiş və istifadə olunacaq yeni düsturlar çıxarılmışdır.

1.2-də verilən oblastda tamədədli koordinatları olan nöqtənin varlığı məsələsinə baxılmışdır. Baxılan oblast

$$\left. \begin{array}{l} (A, X) \leq b \\ x_j \geq 0, j = 1, n \end{array} \right\} \quad (1)$$

şəklindədir. Burada $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ və $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -ölçülü vektor və ya n -ölçülü nöqtələrdir. (A, X) onların skalyar hasilidir $a_j \geq 0; b > 0; j = \overline{1, n}$.

$$d_j = \frac{b}{a_j} \text{ kəmiyyətlərinə baxaq. } d_j \text{ kəmiyyətləri } (A, X) = b$$

müstəvilərinin koordinat başlanğıcından başlayaraq koordinat oxlarından ayırdığı parçaların ölçüsüdür.

$e_j = [b/a_i]$ kəmiyyətləri isə həmin parçaların tam hissələridir.

Əgər $e_i < 1; j = \overline{1, n}$ olarsa, bu məsələnin $O(0, 0, \dots, 0)$ koordinat başlanğıcından qeyri tam ədədli həlli olmayacaqdır. a_j -lardan hər hansı

biri sıfır olarsa, $d_j = \frac{b}{a_j} = \infty$ olar və bərabərsizliyin qeyri məhdud həlli

olar. e_j -lardan hər hansı biri vahiddən böyük və ya bərabər olarsa (1) bərabərsizliyinin baxılan oblastda tam ədədli həlli olar.

Məhdudiyyətlərin sayı m olan halda da oblastda tamədədli koordinatları olan nöqtənin varlığı məsələsinə baxılmışdır.

$$\left. \begin{array}{l} AX \leq b \\ x_j \geq 0 \\ x_j - \text{lar tamdır} \end{array} \right\} \quad (2)$$

(2) bərabərsizliklər sistemidir və A ($m \times n$) ölçülü matrisdir. (2) bərabərsizliklər sistemini ödəyən tam koordinatlı nöqtənin varlığı məsələsinə araşdıraraq.

$e_{ij} = E[b_i/a_{ij}]$ matrisini qururuq. Bu matrisin sütun elementlərindən minimum qiymət alanlarını seçirik. Bu matrisi M -matris adlandıraraq

$$M = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \dots e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} \dots e_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ e_{m1} & e_{m2} \dots e_{mn} \end{pmatrix}$$

$me_j = \min_i e_{ik}; k = \overline{1, n}$. Elementləri me_j -lardan təşkil olunmuş

vektoru ME ilə işarə edək. ME vektorunun elementlərinin aldığı qiymətlərə görə (2) məsələsinin tam ədədli həlli olub-olmamasını (1) məsələsindəki kimi tədqiq etmək olar.

1.3-də həllə yaxınlaşan ardıcılığın qurulması üçün bir yanaşma təklif edilmiş və göstərilmişdir ki, budaqlanan proseslərdə iterasiyaların sayı ən çoxu 2^n -lə mütənasib ola bilər.

1.4-də tam koordinatlı nöqtənin tamədədli xətti proqramlaşdırma məsələsinin həlli olması üçün zəruri şərt isbat edilmişdir.

Teorem 1. Oblasta daxil olan tamədədli nöqtənin, tamədədli xətti proqramlaşdırma məsələsinin optimal həlli olması üçün zəruri şərt, koordinat başlanğıcının həmin nöqtəyə paralel köçürməsindən alınan yeni koordinat sistemində tərtib edilmiş M -matrisin minimal sütun elementlərinin vahiddən kiçik olmasıdır.

1.5-də ümumi şəkildə verilmiş tamədədli xətti proqramlaşdırma məsələsinin iki qiymətli dəyişəndən (0 və ya 1) asılı məsələyə gətirilməsi izah edilmişdir.

1.6-da üçölçülü kubun təpə nöqtələri, 1.7.-də isə analogi olaraq n -ölçülü kubun təpə nöqtələri tədqiq edilmişdir. Bu kubun tili vahidə bərabər olub, təpə nöqtələrindən biri koordinat başlanğıcında yerləşir, koordinat başlanğıcından çıxan tərəfləri isə koordinat sisteminin müsbət yarımoxları üzərindədir. Bu təpələrin sayı $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$ -dir. Qeyd edilmiş k üçün C_n^k

sayda nöqtələr elə nöqtələrdir ki, onların k sayda koordinatları vahid, $n - k$ sayda koordinatları isə sıfırlardan ibarətdir. Bu nöqtələri öz üzərində saxlayan hipermüstəvilərin tənliyi aşağıdakı kimidir:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k; k = \overline{1, n} \quad (3)$$

(3) tənliyindən görünür ki, C_n^k sayda nöqtələri öz üzərində saxlayan hipermüstəvilər bir-birinə paraleldir. Bu müstəviləri M_{nk} ilə işarə edək.

$R_k = \sqrt{k}$ bu nöqtələrin koordinat başlanğıcından məsafələridir. $d_k = \frac{k}{\sqrt{n}}$,

M_{nk} hipermüstəvisinin koordinat başlanğıcından olan məsafəsidir.

$$o_{nkj} = \frac{k}{n}; \quad j = \overline{1, n} \quad \text{nöqtələri, } M_{nk} \quad \text{üzərində yerləşən və}$$

hiperkubun M_{nk} -ya daxil olan təpə nöqtələrini öz üzərində saxlayan hiperçevrənsin mərkəzidir.

$$r_{nk} = \sqrt{\frac{nk - k^2}{n}} \quad \text{bu hiperçevrənin radiusudur. Radiusu } r_{nk} \text{-ya}$$

bərabər olan, mərkəzi isə O_{nk} - nöqtəsi olan hiperçevrəni K_{nk} ilə işarə edək.

Hər bir n -ölçülü fəzada tili vahidə bərabər olan n -ölçülü kubun təpə nöqtələrinin çoxluğu olan S çoxluğu kombinator məsələlərin, 0 və 1 dən asılı olan proqramlaşdırma məsələlərinin təyin oblastıdır. S çoxluğunu M_{nk} paralel müstəviləri üzərində yerləşən K_{nk} hiperçevrələr üzərində qruplaşdırıb bu sinif məsələləri hər bir K_{nk} -da həll edib, sonra isə ümumi optimum tapa bilərik. Bu ümumi bir həndəsi prinsipdir. İstənilən oblastda təyin olunmuş optimallaşdırma məsələsini həll edərkən birləşmələri oblasta bərabər olan, kəsişmələri isə boş çoxluq olan hissələrdə məsələni həll edib, hər bir hissədə optimal həlli tapıb müqayisə edərək ümumi optimal həlli tapmaq olar.

İkinci fəsildə bir məhdudiyyətli n -dəyişənli çanta məsələsinin nümunəsində tam ədədli proqramlaşdırma məsələlərinin həndəsi üsullarla həllinin nəzəri əsasları verilmişdir.

2.1-də məsələnin qoyuluşu və onun həndəsi interpretasiyası verilmişdir:

$$\left. \begin{aligned} (C, X) &\rightarrow \max \\ (A, X) &\leq b \\ X &\in S; |S| = 2^n; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

2.2-də N -ölçülü kubun təpə nöqtələrinin hissə-hissə hiperçevrələrin üzərində nizamlanması prinsipi göstərilmişdir. C vektorunu normallaşdırıb onu C_n -lə işarə edərək, C vektorunun M_{nk} üzərindəki proyeksiyası üçün alırıq: $C_p = C_n - (C_n, N_n)N_n$.

Göstərilmişdir ki, K_{nk} üzərində funksionalın aldığı minimum

qiymət, onun k sayda minimum elementlərinin cəminə, K_{nk} üzərində aldığı maksimum qiymət isə, onun k sayda maksimum elementlərinin cəminə bərabərdir.

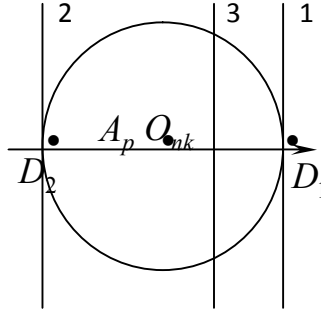
2.3-də məhdudiyyət hipermüstəvisi ilə hiperçevrələrin qarşılıqlı vəziyyəti araşdırılmışdır.

$M : \{(A, X) = b\}$ M məhdudiyyət hipermüstəvisi ilə K_{nk} hiperçevrələrinin qarşılıqlı vəziyyətlərini araşdıraraq.

A vektorunu normallaşdıraraq və onun A_n -lə işarə edək. $|A_n| = 1$ olar. A vektorun M_{nk} hipermüstəvisi üzərində proyeksiyasını tapaq:

$$A_p = A_n - (A_n, N_n)N_n$$

M hipermüstəvisi ilə K_{nk} hiperçevrələri arasında aşağıdakı üç münasibətdən biri mümkündür. Şəkil 1.



Şəkil 1

1) $b > (A, D_1)$. Burada D_1 nöqtəsi O_{nk} nöqtəsindən A_p istiqamətində keçən düz xətt ilə K_{nk} hiperçevrəsinin kəsişməsindən alınan və hiperçevrə üzərində (A, X) skalyar hasilinə ən böyük qiymət verən nöqtədir. Bu halda K_{nk} üzərində yerləşən bütün nöqtələr $(A, X) \leq b$ məhdudiyyətini ödəyir.

2) $b < (A, D_2)$. Burada D_2 nöqtəsi O_{nk} nöqtəsindən A_p istiqamətində keçən düz xətti ilə K_{nk} hiperçevrəsinin kəsişməsindən alınan və hiperçevrə üzərində (A, X) skalyar

hasilinə ən kiçik qiymət verən nöqtədir. Bu halda K_{nk} üzərində yerləşən heç bir nöqtə $(A, X) \leq b$ məhdudiyyətini ödəmir.

3) $(A, D_1) \leq b \leq (A, D_1)$. Bu halda M hipermüstəvisi K_{nk} hiperçevrəsini ya kəsir, ya da D_1 və D_2 nöqtələrində ona toxunur. (4) məsələsini həll etmək üçün onu hər bir $K_{nk} \subset M_{nk}$ üzərində həll edəcəyik. Hər bir K_{nk} üzərində tapılan həlli X_{nk} ilə işarə edəcəyik.

$$\max(C, X) = \max_k (C, X_{nk}^*), \quad k = \overline{1, n} \text{ olar.}$$

Yuxarıda baxılan birinci halda K_{nk} üzərində məsələnin həlli elə X_{nk}^* nöqtəsi olar ki, onun k sayda ən böyük qiymət alan c_j -lara uyğun koordinatları vahid digər $n - k$ sayda koordinatları isə sıfır qiymət alar.

İkinci halda isə məsələnin həlli yoxdur. Bu halda məsələnin həllini şərti olaraq $O(0, 0, \dots, 0)$ nöqtəsi qəbul edilir.

Üçüncü halda isə (4) məsələsinin K_{nk} üzərində həlli xüsusi əhəmiyyət kəsb edir. Çünki NP probleminin həlli onun üçüncü halda həll edilməsinə gətirilir.

2.4-də hiperqövs üzərində həllin varlığı kriterisi müəyyən edilmişdir.

Hiperqövs üzərində məsələni həll etmək üçün üç prinsip rəhbər tutulmuşdur.

- 1) Hiperqövs üzərində həllin varlığını müəyyən etmək.
- 2) Tapılan ilkin nöqtədən istifadə edərək həllə yaxınlaşan ardıcılıq qurmaq.
- 3) Tapılan həllin optimal həll olmasının zəruri və kafi şərtini isbat etmək.

K_{nk} üzərində koordinatları vahid və sıfırlardan ibarət tamədədli nöqtələr çoxluğunu $X(n, k)$ ilə işarə edək.

A vektorunun elementlərindən k -cı minimum elementi tapmaq və onu a_{km} ilə işarə edək. $a_{km} - a_j \geq 0$ şərtini ödəyən a_j -lara uyğun olan k sayda x_{1j} -lara vahid, digər $n - k$ sayda a_j -lara uyğun x_{1j} -lara sıfır qiymət verək. Əgər $X_1(n, k)$ nöqtəsi məhdudiyyəti ödəmirsə (4)

məsələsinin baxılan K_{nk} üzərində həlli yoxdur. Əgər $X_1(n, k)$ nöqtəsi məhdudiyyəti ödəyirsə, onda (4) məsələsinin K_{nk} üzərində həlli var.

2.5-də hiperçevrə üzərində yerləşən nöqtənin lokal xassəsi tədqiq edilmişdir.

Hiperçevrə üzərində yerləşən ixtiyari nöqtəyə həmin hiperçevrə üzərində ən yaxın tamədədli nöqtənin tapılması qaydası müəyyən edilmişdir.

2.6-da hiperçevrə ilə məhdudiyyət hiperüstəvilərinin kəsişməsində alınan seqmentlərin vəziyyətindən asılı olaraq məsələnin hiperüstəvilər üzərində kəsilməz maksimumları araşdırılmışdır.

2.7-də nöqtənin tamədədli xətti proqramlaşdırma məsələsinin həlli olması üçün zəruri və kafi şərt haqqında teorem isbat edilmişdir.

Teorem 2. Tam koordinatlı X_t nöqtəsinin qabarıq oblastda təyin olunmuş tamədədli xətti proqramlaşdırma məsələsinin optimal həlli olması üçün zəruri və kafi şərt $(C, X) = (C, X_t)$ və $(C, X) = (C, \bar{X})$ hiperüstəviləri arasında oblasta daxil olan heç bir tamədədli koordinatları olan nöqtənin olmamasıdır. Burada $\bar{X}$ baxılan məsələnin kəsilməz həllidir. $(C, X) = (C, X_t)$ və $(C, X) = (C, \bar{X})$ hiperüstəviləri $Z = (C, X)$ funksionalının uyğun olaraq, X_t tam koordinatlı nöqtədən və $\bar{X}$ nöqtəsindən keçən səviyyə müstəviləridir.

2.8-də M_{nk} hiperüstəvisi üzərində kəsilməz həllərin tapılması üsulları verilmişdir.

2.9-da genişlənmiş seqment üsulu verilmişdir.

(1) məsələsini M_{nk} üzərində həll edərkən, $(A, X) \leq b$ bərabərsizliyində b ədədini b_1 ədədi ilə əvəz edirik: $b_1 = b + \varepsilon$, $\varepsilon = b_1 - b < 1$. Daha sonra (1) məsələsinə ekvivalent olan (5) məsələsinə baxırıq

$$\left. \begin{array}{l} \max(C, X) \\ (A, X) < b_1 \\ X \in S \end{array} \right\} \quad (5)$$

2.10-da genişlənmiş seqmentdə, hiperqövs üzərində xətti proqramlaşdırma məsələsinin həllinə yaxınlaşan ardıcılığın qurulması və

ümumi həllin tapılması üsulları verilmişdir.

Varlıq kriterisi ilə tapılan $X_1(n, k)$ nöqtəsi $\overline{X}$ kəsilməz həlli ilə düz xətlə birləşdirilir. $X_1(n, k)\overline{X}$ parçası yarıya bölünür. Bu orta nöqtə O_{nk} nöqtəsi ilə birləşdirilir. $O_{nk}O$ düz xəttinin hiperçevrə ilə kəsişməsi tapılır. Tapılan X_{k1} nöqtəsinə ən yaxın tam ədədli nöqtə hiperçevrə üzərində nöqtənin lokal xassəsinə əsasən müəyyən edilir. $X_{k1}\overline{X}$ vətəri yarıya bölünüb və X_{k2} nöqtəsi tapılır. X_{k2} nöqtəsinə yaxın $X_2(n, k)$ nöqtəsi tapılır. Proses $X_{kq}\overline{X}$ uyğun hiper qövs üzərində tamədədli nöqtə olmayana qədər davam etdirilir. $X_{kq}(n, k)$ nöqtəsi hiperqövs üzərində məsələnin həlli qəbul edilir. Bu proses $k = \overline{1, n}$ bütün hiperçevrələr üzərində aparılır. Optimal həll $\max_k(C, X_{nk}^*)$ münasibətinə əsasən müəyyən edilir.

Üçüncü fəsildə hesablama eksperimentləri, onların təhlili və alınan nəticələr verilmişdir.

3.1-də çanta məsələsi haqqında əlavə məlumat verilmişdir. Çanta məsələsində $c_j = a_j$ olduqda alınan optimallaşdırma məsələsi-alt cəmlər çoxluğu məsələsi (*Subset Sum Problem*) (*SSP*) adlanır. Burada a_j kəmiyyətlərindən düzələn və b -ni aşmağı alt cəmlərin maksimum qiymətinə baxılır.

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \rightarrow \max$$

$$(SSP) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b \\ x_j \in \{0,1\}; j = 1,2,\dots,n \end{cases} \quad (6)$$

Baxmayaraq ki, SSP çanta məsələsinin (*Knapsack problem - KP*) xüsusi halıdır o NP -çətin və NP -tamamlanmış məsələdir.

NP -tamamlanmış məsələlərin sinfi NPC (NP -complete) ilə məsələlər sinfidir ki, bu məsələlər çoxluğu Q aşağıdakı iki şərti ödəsin:

1. $Q \in NP$
2. $\forall R \in NP : pQ \leq Q$

Birinci şərt göstərir ki, Q çoxluğu NP sinfinə daxil olan məsələlərdən ibarətdir. İkinci şərt isə onu göstərir ki, istənilən NP məsələsi polinomial sayda əməliyyat ilə Q məsələsinə gətirilə bilər. NP -tamamlanmış məsələlərin nəzəriyyəsi göstərir ki, SSP məsələsini polinomial alqoritm ilə həll etmək bir sıra məşhur optimallaşdırma məsələlərini də polinomial alqoritm ilə həll edə bilmək deməkdir. Bu məsələlərə ümumi şəkildə verilmiş tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsi, kommivoyajer haqqında məsələ və s. daxildir.

3.2-də hiperqövs üzərində həllə yaxınlaşan ardıcillıq analitik şəkildə qurulmuşdur.

Məsələnin hiperqövs üzərində analitik ifadəsini verək

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j x_j &\rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n a_j x_j &\leq b \\ \sum_{j=1}^n x_j &= k \\ \sum_{j=1}^n (O_{nkj} - x_j)^2 &= r_{nk}^2 \\ x_j &\in \{0,1\} \\ j &= 1,2,\dots,n \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Fərz edək ki, $X_1(n, k)$ nöqtəsi varlıq kriterisi ilə müəyyən edilmişdir və K_{nk} hiperçevrəsi üzərində yerləşir. Biz bu nöqtədən istifadə edərək hiperqövs üzərində (KP) məsələsinin həllinə yaxınlaşan ardıcillıq quraq. Bu ardıcillığın hədləri məhdudiyyəti ödəməlidir və funksionala ciddi monoton artan qiymətlər verməlidir.

1. Monotonluq şərti: $X_1(n, k)$ nöqtəsinin sıfır qiymət alan

koordinatlarından birini götürək, buna uyğun c_i -ni qeyd edək: $c_i - c_j > 0$ şərtini ödəyən j indeksini qeyd edək.

2. Məhdudiyyətin ödənməsi şərti: i və j indeksləri üçün məhdudiyyətin ödənməsi şərtini verək. $d = b - \sum_{j=1}^n a_j x_{1j}$ fərqini hesablayaq; $d + a_j - a_i \geq 0$ şərti məhdudiyyətin ödənməsi şərtidir:

$$\begin{cases} c_i - c_j > 0 \\ d + a_j - a_i \geq 0 \end{cases} \quad (8)$$

Əgər (8) şərtləri ödənersə $x_{1j} = 0$; $x_{1i} = 1$ qəbul edirik. Bu yolla alınmış $X_2(n, k)$ nöqtəsi funksionalın qiymətini artırır, məhdudiyyəti ödəyir və K_{nk} üzərində yerləşir. Bu prosesi o qədər davam etdiririk ki, (8) münasibətləri i və j indeksləri arasında ödənməsin. Prosesi $k = 1, 2, \dots, n-1$ şərtini ödəyən K_{nk} -lar üçün davam etdirərək $X_q^*(n, k)$ nöqtələrini tapırıq. Bu nöqtələrin funksionala verdikləri qiymətləri müqayisə edib (KP) məsələsinin həllini tapırıq

$$Z^* = \max(C, X_q^*(n, k)); \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Burada $C(c_1, c_2, \dots, c_n)$ məqsəd funksiyası vektorudur.

3.3-də hesablama eksperimentlərinin nəticələri verilmişdir.

Təklif olunmuş üsul aşağıdakı məsələlər çoxluğu üzərində yoxlanmış və müqayisə edilmişdir:

$$\begin{aligned} Z = & 54x_1 + 68x_2 + 789x_3 + 65x_4 + 24x_5 + 35x_6 + 61x_7 + 42x_8 + \\ & + 786x_9 + 43x_{10} + 512x_{11} + 424x_{12} + 321x_{13} + 11x_{14} + 4x_{15} + 47x_{16} + \\ & + 35x_{17} + 56x_{18} + 12x_{19} + 754x_{20} + 55x_{21} + 457x_{22} + x_{23} + 65x_{24} + \\ & + 74x_{25} + 22x_{26} + 4x_{27} + 45x_{28} + 12x_{29} + 5x_{30} + 57x_{31} + 57x_{32} + \\ & + 23x_{33} + 54x_{34} + 2x_{35} + 42x_{36} + 77x_{37} + 78x_{38} + 682x_{39} + 142x_{40} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 541x_1 + 786x_2 + 3541x_3 + 75x_4 + x_5 + 652x_6 + 843x_7 + 21x_8 + \\
& + 10x_9 + 40x_{10} + 46x_{11} + 51x_{12} + 752x_{13} + 810x_{14} + 510x_{15} + 21x_{16} + \\
& + 42x_{17} + 121x_{18} + 5x_{19} + 4x_{20} + 72x_{21} + 631x_{22} + 720x_{23} + 435x_{24} + \\
& + 2x_{25} + 820x_{26} + 64x_{27} + 73x_{28} + 770x_{29} + 43x_{30} + 85x_{31} + 912x_{32} + \\
& + 4x_{33} + 35x_{34} + 14x_{35} + 42x_{36} + 22x_{37} + 54x_{38} + 32x_{39} + 35x_{40} \leq b_i; i = \overline{1,7}
\end{aligned}$$

Cədvəl 1

b_i	999	2000	3000	5000	7000	8000	12000
Dəqiq həll	4190	4749	4983	5330	5826	5899	6081
Nəticələr	4172	4717	4983	5318	5826	5899	6081

Bu cədvəldən göründüyü kimi b_3, b_5, b_6, b_7 qiymətlərində məsələnin dəqiq həlli, b_1, b_2, b_4 qiymətlərində isə təqribi həlli alınır. Bu onu göstərir ki, c_i, c_j və a_i, a_j əmsalları arasında (8) münasibətlərinin ödənməsi K_{nk} üzərində həllin optimal olması üçün zəruri şərtidir, lakin kafi deyil.

Bu üsul (*SSP*) məsələsi üçün daha effektiv nəticə verir. *SSP* məsələsi üçün həll edilmiş test məsələsində alınan həllərin hamısı dəqiq nəticələr verir. Nümunə olaraq aşağıdakı məsələyə baxaq:

$$W = (41, 7, 6, 35, 45, 51, 71, 81, 12, 13, 42, 26, 37, 45, 59, 60, 70, 80, 87, 90, 92, 127, 150, 35, 18, 17, 60, 64, 63, 77, 66, 27, 21, 83, 70, 77, 140, 141, 38, 39, 5, 23, 29, 35, 47, 49, 57, 68, 77, 83)$$

Cədvəl 2

b_i	1225	1500	2000	2500	2700
Dəqiq həll	1225	1500	2000	2500	2700
Alınan nəticə	1225	1500	2000	2500	2700

3.4-də hesablama eksperimentlərindən alınan nəticələr təhlil edilmişdir.

Baxdığımız testlərdə (*SSP*) məsələsi üçün dəqiq həllər aldığımız. $b_1 = 1225$ qiymətində bir məsələ üçün $k = 11, 12, \dots, 30$ qiymətlərində K_{nk} hiperçevrələri üzərində 20 dəqiq həll aldığımız. b parametrinin digər qiymətlərində də eyni məsələ üçün bir neçə dəqiq həll alınır.

(KP) məsələsi üçün baxdığımız nümunələrdə aldığımız həllərin yarısı dəqiq oldu.

İndi isə alınan faktları təhlil edərək (KP) və (SSP) məsələləri üçün alınan nəticələri izah edək. (SSP) məsələsi üçün dəqiq həll hiperqövsün hər iki ucunda alına bilər. (KP) məsələsi üçün bunu hökm etmək olmaz. A_p və C_p vektorları (KP) məsələsində üst-üstə düşmədiyi halda məsələnin həlli hiperqövsün uclarından birində yerləşir. K_{nk} üzərində iki koordinatları fərqli olan nöqtələr arasındakı məsafə $\sqrt{2}$ -yə bərabərdir. Alqoritmdeki monotonluq şərtini tətbiq etdikdə biz ancaq aralarındakı məsafə $\sqrt{2}$ -yə bərabər olan nöqtələrin birindən digərinə keçə bilərik. Ona görə də bu həlli həm $A_{\min} H_1$ həm də $A_{\min} H_2$ hiperqövslər üzərində axtarmalıyıq. Hər iki həllin funksionala verdikləri qiymətləri müqayisə edib K_{nk} hiperçevrəsi üzərində optimal həlli tapırıq.

Alqoritmın çətinlik tərtibini araşdırmaq üçün, alqoritmde bir-birinin daxilində yerləşən dövrlərin sayına baxmaq lazımdır. Burada $k = 1, 2, \dots, n$ hiperçevrələrin sayıdır, $i = 1, 2, \dots, n$ sıfır qiymət alan koordinatların seçilməsi dövrüdür, $j = 1, 2, \dots, n$ vahid qiymət alan koordinatların seçilməsi dövrüdür, $q = 1, 2, \dots, n$ iterasiyaların sayıdır.

İterasiyaların sayını qiymətləndirmək lazımdır. Əgər hər hansı $X_1(n, k)$ nöqtəsi başlanğıc nöqtəsi qəbul edilərsə, onda iterasiyaların sayı

$$N_{it} \leq b - (A, X_1(n, k))$$

olar.

Alqoritmın hər iterasiyasında funksionalın qiyməti ən azı bir vahid artır. $(A, X) = b$ hipermüstəvisinə daha yaxın başlanğıc nöqtə götürməklə $N_{it} < n$ şərtini təmin etmək olar.

3.5-də (SSP) məsələsi üçün dəqiq, polinomial və determinə edilmiş həll üsulu əsaslandırılmışdır.

(8) şərtinin inkarını Q ilə ifadə edək.

Teorem 3. K_{nk} hiperçevrəsi üzərində nöqtənin hiperqövsün üzərində lokal optimal həll olması üçün zəruri və kafi şərt, onun sıfır

qiymət alan koordinatlarına uyğun c_i və a_i əmsalları ilə vahid qiymət alan koordinatlarına uyğun c_j və a_j əmsalları arasında Q şərtinin ödənməsidir.

Daha sonra iterasiyaların sayının azaldılması üsulu verilmiş və əsaslandırılmışdır.

Dördüncü fəsildə ümumi şəkildə verilən tamədədli xətti proqramlaşdırma məsələsini, ümumiləşmiş təyinat məsələsini və kommivoyajer haqqında məsələni araşdırıb, bu məsələlərin həndəsi interpretasiyası verilmiş və bu məsələlərin təqribi həll üsulları verilmişdir.

Ümumi şəkildə verilmiş tamədədli xətti proqramlaşdırma məsələsinə baxaq

$$\left. \begin{aligned} Z = (C, X) \rightarrow \max \\ (A_i, X) \leq b_i \quad i = \overline{1, m} \\ X \in S \end{aligned} \right\}. \quad (9)$$

4.1-də (9)-dakı məhdudiyyətlər sistemi ilə hiperçevrələrin kəsişərək əmələ gətirdikləri tamədədli hiperqövslər tədqiq edilmişdir.

4.2-də hiperqövslər üzərində sərhəd nöqtələrinin tapılması və məsələnin həllinin varlığı araşdırılmışdır.

4.3-də üsulun çətinlik tərtibi araşdırılmış və uyğun teorem isbat edilmişdir.

Teorem 4. (9) məsələsinin suboptimal həllinə lazım olan sadə əməllərin (toplama, çıxma, vurma, bölmə, müqayisə, kvadrat kök) sayının tərtibi $O(mn^2 + mn^3)$ olur.

4.4-də “minimum prinsipi” verilmişdir. Bu prinsip varlıq kriterisindən istifadə edərək, məsələnin şərtindən asılı olaraq həllə yaxınlaşan ardıcılığın qurulması mexanizmini ifadə edir.

4.5-də ümumiləşmiş təyinat məsələsi araşdırılmış, onun həndəsi interpretasiyası verilmiş və təqribi həll üsulu göstərilmişdir.

4.6-da kommivoyajer haqqında məsələnin minimum prinsipinin tətbiqi ilə suboptimal həllinin tapılması verilmişdir.

4.5. və 4.6-da baxılan məsələlər ikiindeksli məsələlərdir. Bu məsələləri təkindexli şəkllə gətirərək dissertasiyanın əvvəlki fəsillərində işlənmiş həndəsi yanaşmalar onlara tətbiq edilmişdir.

İşdə alınan əsas nəticələr aşağıdakılardan ibarətdir:

1. Baxılan kombinator məsələlərin həndəsi interpretasiyası yaradılıb və qarşıya qoyulan problemin həllinə tətbiq edilib.
2. Məsələlərin həllinin həndəsi nəzəriyyəsinin əsas elementləri müəyyənləşdirilib.
3. Hiperqövs üzərində tamədədli nöqtələrin varlığı kriterisi müəyyənləşdirilmişdir.
4. Tam ədədli nöqtələrin həllə yaxınlaşan ardıcılığının qurulması alqoritmi yaradılmışdır.
5. Tapılan həllin optimal həll olmasının zəruri və kafiliyinin araşdırılması haqqında teorem isbat edilmiş və baxılan məsələlərə tətbiq edilmişdir.
6. (*SSP*) məsələsi üçün effektiv həll üsulu verilmişdir. İsbat edilmişdir ki, birməhdudiyyətli n dəyişənli (*SSP*) məsələsinin həlli üçün lazım olan sadə əməllərin (toplama, çıxma, vurma, bölmə, müqayisə, kvadrat kök) sayının tərtibi $O(n^4)$ -dür.
7. *NP*-tamamlanmış sinfə daxil olan çoxməhdudiyyətli tam ədədli xətti proqramlaşdırma məsələsinin həndəsi interpretasiyası verilmişdir. Bu məsələnin suboptimal həll üsulu göstərilmişdir.
8. *NP* məsələləri üçün “minimum prinsipi” işlənib hazırlanmışdır.
9. Minimum prinsipi konkret şəkildə *NP*-tamamlanmış sinifə daxil olan ümumiləşmiş təyinat məsələsinə tətbiq edilərək bu məsələnin suboptimal həll üsulu göstərilmişdir.
10. Minimum prinsipi konkret olaraq, *NP*-tamamlanmış sinfə daxil olan kommivoyajer haqqında məsələyə tətbiq edilmiş və bu məsələnin suboptimal həll üsulu qurulmuşdur.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı elmi işlərdə dərc olunmuşdur:

1. Əliyev M.M. *MM* üsulu ilə çanta məsələsinin dəqiq polinomial həlli // Azərb. EA məruzələri (1,3) 2000, s. 10-16.

2. Əliyev M.M. Böyük ölçülü xətti sistemlərin və çanta məsələsinin dəqiq polinomial həll üsulları. Bakı, Elm, 2001, 52 s.
3. Əliyev M.M. Kommivoyajer haqqında məsələnin minimum prinsipi ilə həlli // AMEA xəbərləri, Bakı-“ELM”, №3, 2006, s. 61-64
4. Əliyev M.M. NP probleminin P-də həllinin fundamental nəzəriyyəsi haqqında məlumat. / Тезисы научной конференции посвященной 75-летию члена корреспондента НАНА Я.Дж.Мамедова, Баку: Мутарджим, 2006, стр.22
5. Алиев М.М. Метод направленных прямых для решения задач линейного программирования / Республиканская конференция. Научные основы изучения материально-духовных богатств. Нах. АССР. Тезисы докладов. Нахчивань, 1986, с.4
6. Алиев М.М. Один подход к решению задач математического программирования / Республиканская конференция. Научные основы изучения материально-духовных богатств. Нах.АССР. Тезисы докладов. Нахчивань, 1987, с.5
7. Алиев М.М. Метод направленных прямых для решения систем линейных алгебраических уравнений большой размерности / Материалы VII республиканской конференции молодых ученых по математике и механике. Баку, «Элм», 1987, с.29-32.
8. Алиев М.М. Метод отыскания начальной внутренней точки для задач ЛП. / Республиканская конференция. Научные основы изучения материально-духовных богатств. Нах. АССР. Тезисы докладов. Нахчивань, 1988, с.6-7
9. Алиев М.М. Метод линейного программирования с кубической трудоемкостью размерностей / Материалы IX республиканской конференции молодых ученых по математике и механике. Баку, «Элм», 1987, с.20-24.
10. Алиев М.М. Метод решения больших линейных систем. /Материалы XI республиканской конференции молодых ученых по математике и механике. Баку, «Элм», часть I, 1994, с.24-26.
11. Aliyev M.M. The exact-polynomial solution methods of large dimensional linear systems and the knapsack problem. Baku, «Elm» publishing House, 2002, 51 p.
12. Aliyev M.M. One approach to the solution of the knapsack problem // Reports NAS of Azerbaijan, No 3, 2005, p. 32-39
13. Aliyev M.M. Fundamental theory of solution of NP problem in P. Baku, 2006, «MBM» publishing house, 103 p.
14. Aliyev M.M. The method of solution of the integer linear

- programming problem given in a general form. // Reports NAS of Azerbaijan. №6, 2007, p.3-8
15. Aliyev M.M. Effective solution method of the subset sum problem. // The Third International Conference «Problems of Cybernetics and Informatics», Volume III, September 6-8, 2010, Baku, p.345-347
 16. Aliyev M.M. On Solution Method of the Knapsack Problem. // Proceedings of the Sixth International Conference on Management Science and Engineering Management. Volume I, Springer-Verlag London 2012, p.257-267.

МАГАММЕД МАГЕРРАМ ОГЛЫ АЛИЕВ

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ
СУБОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

РЕЗЮМЕ

Диссертационная работа посвящена методам решения задач целочисленного линейного программирования на основе геометрических подходов.

В работе дана геометрическая интерпретация задач целочисленного программирования и некоторых комбинаторных задач.

Множество точек вершины n -мерного куба, которое содержит область определения этих задач с переменными 0 и 1, детерминировано на гиперокружности, расположенные на параллельных гиперплоскостях. При этом соблюдается упорядоченность целочисленных точек в направлении градиента целевой функции.

Исследовано взаимное расположение гиперплоскостей ограничений и построенных гиперокружностей. Решение NP-проблемы приведено к решению задачи на соответствующей гипердуге. Определен критерий существования решения на гиперокружности. Установлено локальное свойство любой точки принадлежащей гиперокружности. Построена последовательность допустимых решений, приближающихся к точному решению.

Доказано необходимое и достаточное условие того, чтобы целочисленная точка являлась решением задачи.

На основе установленных в работе научных фактов приведены геометрические интерпретации задачи о рюкзаке, задачи целочисленного линейного программирования заданной в общем виде, обобщенной задачи назначений, задачи о коммивояжере и даны методы построения субоптимальных решений этих задач.

Предложенный метод запрограммирован для задачи о рюкзаке и проведены вычислительные эксперименты. Получены эффективные результаты для задачи SSP.

ALIYEV MAHAMMAD MAHARRAM

**GEOMETRICAL METHODS FOR THE SUBOPTIMAL
SOLUTION OF THE INTEGER PROGRAMMING
PROBLEMS**

SUMMARY

The dissertation work is devoted to finding of the solution of integer programming problem by geometrical methods. In the work, the geometrical interpretation of the integer programming problem and the combinatorial problem equivalent to them was given.

The vertex points sets of n -dimensional cube being the domain of definition of these problems with 0 or 1 values was determined on hypercircles belonging on parallel hyperplanes and were ordered the gradient direction of the object function.

The mutual state hypercircles and restriction hyperplanes was investigated. The solution of the NP- problem was reduced to the solution on a hyper arch. The existence criterion of solution on the hyper arch was determined. The local property of an arbitrary point located on a hyper circle was revealed. The creation of feasible solutions sequence approaching to the exact solution was established. The necessary and sufficient condition for the integer point to be the solution of the problem was proved.

Using all these scientific novelties given the geometric interpretation of the knapsack problem, the integer linear program problem given in the general form, the generalized assignment problem and the salesman problem was shown and methods for finding the suboptimal solutions were given.

A method for the knapsack problem was programmed and the computation experiments were conducted. The effective results for a special case of the knapsack problem – the (SSP) problem were obtained.

**НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ**

На правах рукописи

МАГАММЕД МАГЕРРАМ ОГЛЫ АЛИЕВ

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ
СУБОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

1203.01- Компьютерные науки

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

**диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике**

Баку- 2014