

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

На правах рукописи

Матанат Асаф кызы Мусаева

**ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ
ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА ШРЕДИНГЕРА**

1211.01-дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

**Диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике**

БАКУ – 2014

Работа выполнена на кафедре «Физики, математики и информатики» Ленкоранского Государственного Университета.

Научный руководитель: Доктор физико-математических наук, профессор Г.Я.Ягубов

Официальные оппоненты: Доктор физико-математических наук, профессор Т.К.Меликов

Доктор математических наук,
профессор И.М.Набиев

Ведущая организация: Институт Математики и Механики
Национальной Академии Наук
Азербайджана

Защита диссертации состоится 28 марта 2014 г. в 14⁰⁰ часов на заседании Диссертационного Совета FD.02.016 по присуждению ученой степени доктора философии по математике при Бакинском Государственном Университете

Адрес: AZ 1148, г. Баку, ул. З. Халилова, 23

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Бакинского Государственного Университета

Автореферат разослан 26 февраля 2014 г.

**Ученый секретарь
Диссертационного Совета FD.02.016,
доктор математических наук, профессор**

Н.Г.Ахмедов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Определение неизвестных характеристик распределенной системы относится к одному из ведущих разделов математического моделирования, дифференциальных уравнений, теории некорректных и обратных задач, а также теории оптимального управления системами с распределенными параметрами. Определение неизвестных характеристик материалов, обычно, проводится решением соответствующих обратных задач. В теорию и методов решения обратных и некорректных задач принципиальный вклад внесли работы А. Н. Тихонова, М. М. Лаврентьева, В. К. Иванова и их последователей.

Последние 50 лет отличается успешным развитием теории и методов решения обратных задач и применением вариационных методов решения обратных задач для уравнений в частных производных, а также развитием теории вариационных задач, в том числе теории оптимального управления для распределенных систем.

Данная работа относится к теории и методов решения обратных задач об определении неизвестных коэффициентов уравнений типа Шредингера. Определение коэффициентов уравнения Шредингера является одной из основных проблем квантовой механики, теории сверхпроводимости, нелинейной оптики и других областей современной физики. Задача определения квантового механического потенциала в нестационарном уравнении Шредингера исследуется со времен зарождения квантовой теории. Это проблема часто возникает в квантовой механике и ядерной физике. При упрощающих предположениях квантового механический потенциал определяется на основе интуитивных соображений. В практике неизвестные параметры в выражений квантовых потенциалов часто определяются методом минимизации энергии системы и вариационными принципами. В данном случае возникающие задачи тесно связаны с задачами оптимального управления квантово механических систем. Вопросы определения потенциалов взаимодействия элементарных частиц стимулировали развитию теории обратных задач спектральной теории и теории рассеяния.

Начиная с 80-х годов к решению обратной задачи об определении квантово механического потенциала в уравнении Шредингера применяются методы вариационного исчисления и изучаются вариационные постановки этих задач с помощью теории и методов оптимального управления. В этом направлении отметим работы А.Г.Бутковского, Ю.И.Самойленко, где ставятся различные задачи управления квантово механическими процессами или квантово механическим потенциалом в линейном уравнении Шредингера и обсуждаются подходы к их решению. Следует отметить, что систематическое изучение вариационных постановок обратных задач об определении квантово механического потенциала проводилось в работах Ф.П.Васильева, А.Д.Искендерова, Г.Я.Ягубова, D.N.Hao, L.Baudonin, M.Yamamoto, и др., где фактически развиваются теория и методы решения вариационных постановок обратных задач об определении вещественнозначного квантово механического потенциала в нестационарном линейном и нелинейном уравнениях Шредингера.

В данной работе впервые исследуются вариационные постановки обратных задач об определении вещественнозначного и комплекснозначного коэффициентов в нелинейной части уравнения типа Шредингера. Другими словами, решаются обратные задачи об определении нелинейных показателей преломления и поглощения среды распространения световых пучков в нелинейном уравнении квазиоптики и квантовой механики. Следовательно, тема диссертации, посвященная исследованию вопросов корректности постановки, необходимого условия и численного решения вариационных постановок обратных задач об определении вещественнозначного и комплекснозначного коэффициентов нелинейного уравнения типа Шредингера является актуальной и представляет теоретический и практический интерес.

Цели и задачи диссертационного исследования. Основная цель диссертационного исследования заключается в определении неизвестных коэффициентов, особенно квантово механического потенциала в уравнении типа Шредингера, то есть решению обратных задач для этого уравнения.

Методы исследования. Основным методом исследования рассматриваемых обратных задач является, вариационный метод в комбинации с теории неустойчивых задач. При этом коррект-

ность начально-краевых задач для нелинейного уравнения типа Шредингера исследуется с помощью метода Гальперкина.

Объектом исследования является квантово механические процессы, описываемые нелинейным уравнением типа Шредингера.

Научная новизна.

- В работе впервые исследована корректность постановки и доказаны теоремы существования и единственности решения первой и второй начально-краевых задач для нелинейного уравнения типа Шредингера с измеримыми ограниченными вещественнозначными а также комплекснозначными коэффициентами.

- Установлена оценка коэффициентной устойчивости решений начально-краевых задач для нелинейного уравнения типа Шредингера.

- Доказаны теоремы существования и единственности решения вариационной постановки обратной задачи для нелинейного уравнения типа Шредингера с финальным и граничным наблюдениями.

- Установлены необходимые условия в виде принципа максимума и вариационного неравенства для решения вариационной постановки обратной задачи для нелинейного уравнения типа Шредингера с вещественнозначным а также комплекснозначным коэффициентами в случаях финального и граничного наблюдений.

- Дана разностная аппроксимация вариационных постановок обратных задачи для нелинейного уравнения типа Шредингера и доказана сходимость разностных аппроксимации по функционалу в случаях финального и граничного наблюдений.

Научная и практическая ценность диссертационной работы заключается в том, что результаты работы существенно развивают теорию и методов решения обратных задач для нелинейного уравнений типа Шредингера. Они могут быть применены для эффективного определения квантово механических характеристик материалов и потенциалов в ядерной энергетике, нанотехнологии, в квантовых компьютерах и в др. областях современной практики.

Апробация результатов работы. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах Институтах Кибернетики,

Математики и Механики НАНА, на семинарах кафедры оптимизация и управление Бакинского Государственного Университета, на семинарах кафедры физики, математики и информатики Ленкоранского Государственного Университета, на семинаре кафедры «Системный анализ и теория принятия решений» Киевского Национального Университета имени Тараса Шевченко, на международной конференции «Обратные и некорректные задачи математической физики», 2012 г., Новосибирск, Россия, на XX международной конференции «Проблемы принятия решений в условиях неопределенности», 2012 г., Брно, Чехия.

Структура и объем работы. Работа изложена на 149 страницах, состоит из введения, трех глав, приложения и списка используемых литератур, содержащего 160 наименований.

Публикация. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-15], список которых приводится в конце автореферата

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введение обосновывается актуальность темы диссертации, приводятся исследования примыкающих к теме диссертации, и излагается краткое содержание работы

Первая глава посвящена изучению разрешимости начально-краевых задач для нелинейного уравнения типа Шредингера. Это глава состоит из трех параграфов.

В параграфе 1.1 рассматриваются первая и вторая начально-краевые задачи для одномерного нелинейного уравнения типа Шредингера с вещественнозначными измеримыми ограниченными коэффициентами.

Рассмотрим первую начально-краевую задачу для уравнения Шредингера об определении функции $\psi = \psi(x, t)$ в области $\Omega = (0, l) \times (0, T)$ из условий:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - a(x)\psi - v_0(x)\psi - v_1(x)|\psi|^2 \psi = 0, (x, t) \in \Omega, \quad (1)$$

$$\psi(x, 0) = \varphi(x), x \in (0, l), \quad (2)$$

$$\psi(0, t) = \psi(l, t) = 0, t \in (0, T), \quad (3)$$

где $i = \sqrt{-1}$, $l > 0, T > 0$ – заданные числа, функции $a(x), v_0(x), v_1(x)$ являются вещественнозначными измеримыми и удовлетворяют условиям:

$$0 \leq a(x) \leq \mu_0, \forall x \in (0, l), \mu_0 = \text{const} > 0 \quad (4)$$

$$|v_m(x)| \leq b_m, \forall x \in (0, l), b_m = \text{const} > 0; m = 0, 1; \quad (5)$$

$\varphi(x)$ – комплекснозначная измеримая функция, удовлетворяющая условию:

$$\varphi \in \overset{0}{W}_2(0, l). \quad (6)$$

Определение 1. Функцию $\psi = \psi(x, t)$ из пространства $\overset{0}{W} \equiv \left\{ \psi = \psi(x, t) : \psi \in L_\infty \left(0, T; \overset{0}{W}_2(0, l) \right), \frac{\partial \psi}{\partial t} \in L_\infty(0, T; L_2(0, l)) \right\}$ называем решением начально-краевой задачи (1)-(3), если она удовлетворяет условиям (1)-(3) для почти всех $(x, t) \in \Omega$.

С помощью метода Галеркина доказана:

Теорема 1. Пусть функции $a(x), v_0(x), v_1(x), \varphi(x)$ удовлетворяют условиям (4)-(6), соответственно. Тогда начально-краевая задача (1)-(3) имеет единственное решение из пространства $\overset{0}{W}(\Omega)$ и для этого решения справедлива оценка:

$$\|\psi\|_{\overset{0}{W}(\Omega)}^2 \leq c_1 \left(\|\varphi\|_{\overset{0}{W}_2(0, l)}^2 + \|\varphi\|_{\overset{0}{W}_2(0, l)}^6 + \|\varphi\|_{L_2(0, l)}^{18} \right), \quad (7)$$

где $c_1 > 0$ – некоторая постоянная.

Рассмотрим вторую начально-краевую задачу об определении функции $\psi = \psi(x, t)$ в области $\Omega = (0, l) \times (0, T)$ из условий (1), (2) и

$$\frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(l, t)}{\partial x} = 0, t \in (0, T), \quad (8)$$

где функции $a(x), v_0(x), v_1(x)$ являются измеримыми вещественнозначными функциями удовлетворяющими условиям (4), (5), а функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям:

$$\varphi \in W_2^2(0, l), \frac{d\varphi(0)}{dx} = \frac{d\varphi(l)}{dx} = 0 \quad (9)$$

Определение 2. Функцию $\psi = \psi(x, t)$ из пространства $W \equiv \left\{ \psi = \psi(x, t) : \psi \in L_\infty(0, T; W(0, l)), \frac{\partial \psi}{\partial t} \in L_\infty(0, T; L_2(0, l)) \right\}$ называем решением начально-краевой задачи (1), (2), (8), если она удовлетворяет этим условиям для почти всех $(x, t) \in \Omega$.

Аналогично теореме 1 методом Галеркина доказана:

Теорема 2. Пусть функции $a(x), v_0(x), v_1(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям (4), (5), (9), соответственно. Тогда вторая начально-краевая задача (1), (2), (8) имеет единственное решение из пространства $W(\Omega)$ и для этого решения справедлива оценка:

$$\|\psi\|_{W(\Omega)}^2 \leq c_2 \left(\|\varphi\|_{W_2^2(0, l)}^2 + \|\varphi\|_{W_2^1(0, l)}^6 + \|\varphi\|_{L_2(0, l)}^{18} \right), \quad (10)$$

где $c_2 > 0$ – некоторая постоянная.

В параграфе 1.2 рассматриваются первая и вторая начально-краевые задачи для одномерного нелинейного уравнения типа Шредингера с комплекснозначными измеримыми ограниченными коэффициентами. Рассматривается первая начально-краевая задача об определении функции $\psi = \psi(x, t)$ в области $\Omega = (0, l) \times (0, T)$ из уравнения:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(a_0(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - a(x) \psi - v_0(x) \psi - v_1(x) |\psi|^2 \psi = f(x, t), x \in \Omega \quad (11)$$

и условий (2), (3), где $i = \sqrt{-1}$, $l > 0, T > 0$ – заданные числа, $a_0(x), a(x)$ – заданные вещественнозначные измеримые функции, удовлетворяющие условиям:

$$0 < \mu_0 \leq a_0(x) \leq \mu_1, \left| \frac{da_0(x)}{dx} \right| \leq \mu_2, \forall x \in (0, l), \mu_0, \mu_1, \mu_2 = \text{const} > 0 \quad (12)$$

$$0 \leq a(x) \leq \mu_3, \forall x \in (0, l), \mu_3 = \text{const} > 0 \quad (13)$$

$v_0(x), v_1(x), \varphi(x), f(x, t)$ – заданные комплекснозначные измеримые функции, удовлетворяющие условиям:

$$v_0(x) = v_{01}(x) + iv_{02}(x), v_1(x) = v_{11}(x) + iv_{12}(x),$$

$$|v_{0s}(x)| \leq b_s, \forall x \in (0, l), b_s = \text{const} > 0, s = 1, 2; \quad (14)$$

$$\tilde{d}_1 \leq v_{11}(x) \leq d_1 < 0, 0 < \tilde{d}_2 \leq v_{12}(x) \leq d_2, \forall x \in (0, l), \quad (15)$$

$d_s, \tilde{d}_s, s = 1, 2$, – заданные числа такие, что:

$$\tilde{d}_2 \geq 2|\tilde{d}_1|. \quad (16)$$

Кроме того, пусть

$$\varphi \in W_2^{0,2}(0, l), f \in W_2^{0,1}(\Omega). \quad (17)$$

Определение 3. Функцию $\psi = \psi(x, t)$ из пространства $W_0 \equiv C^0([0, T], W_2^{0,2}(0, l)) \cap C^1([0, T], L_2(0, l))$ назовем решением задачи (11), (2), (3), удовлетворяющую уравнению (11) для любого $t \in [0, T]$ и для почти всех $x \in (0, l)$, начальному условию (2) для почти всех $x \in (0, l)$, краевому условию (3) для почти всех $t \in [0, T]$.

С помощью метода Галеркина доказано утверждение:

Теорема 3. Пусть удовлетворяются условия (12)–(17). Тогда начально-краевая задача (11), (2), (3) имеет единственное решение из W_0 и для этого решения справедливо оценка:

$$\|\psi(\cdot, t)\|_{W_2(0, l)}^2 + \left\| \frac{\partial \psi(\cdot, t)}{\partial t} \right\|_{L_2(0, l)}^2 \leq c_3 \left(\|\varphi\|_{W_2(0, l)}^2 + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{W_2^{0,1}(0, l)}^6 \right), \forall t \in [0, T], \quad (18)$$

где $c_3 > 0$ – некоторая постоянная.

Далее в параграфе 1.2 рассматривается вторая начально-краевая задача для уравнения (11) и для ее решения установлен аналог теоремы 3.

В параграфе 1.3 изучается вопрос о коэффициентной устойчивости относительно вещественнозначных коэффициентов $v_0(x), v_1(x)$ решений начально-краевых задач, рассмотренных в параграфе 1.1. При этом устанавливаются оценки коэффициентной устойчивости решений рассмотренных выше первой и второй начально-краевых задач.

Вторая глава работы посвящена исследованию вариационных постановок обратных задач для нелинейного уравнения типа Шредингера с финальным и граничным наблюдениями, когда отыскиваемые коэффициенты при младшем слагаемом и при нелинейной части уравнения являются вещественнозначными или комплекснозначными функциями. Эта глава состоит из трех параграфов.

В параграфе 2.1 изучается корректность вариационной постановки обратной задачи для нелинейного уравнения типа Шредингера с финальным и граничным наблюдениями, когда отыскиваемые коэффициенты являются вещественнозначными измеримыми ограниченными функциями. Сперва рассматривается следующая вариационная задача являющаяся вариационной постановкой соответствующей обратной задачи о минимизации функционала:

$$J_\alpha(v) = \|\psi(\cdot, T) - y\|_{L_2(0, l)}^2 + \alpha \|v - \omega\|_H^2 \quad (19)$$

на множестве $V \equiv \left\{ v = (v_0, v_1), v_m \in L_2(0, l), |v_m(x)| \leq b_m, \forall x \in (0, l), m = 0, 1 \right\}$

при условиях (1)–(3), где $l > 0, T > 0, b_0 > 0, b_1 > 0, \alpha \geq 0$ – заданные числа, $a(x)$ – заданная вещественнозначная измеримая ограниченная функция, удовлетворяющая условию (4), а $\varphi(x), y(x)$ – заданные комплекснозначные измеримые функции, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi \in W_2^{0,2}(0,l), y \in L_2(0,l), \quad (20)$$

$H \equiv L_2(0,l) \times L_2(0,l)$, $\omega \in H$ - заданный элемент.

Задачу об определении функции $\psi = \psi(x, t) = \psi(x, t; v)$ из условий (1)-(3) при каждом выбранном $v \in V$ будем называть прямой задачей. Под решением прямой задачи (1)-(3) понимается функция $\psi(x, t)$ в смысле определения 1.

Теорема 4. Пусть функции $a(x), \phi(x), y(x)$ удовлетворяют условиям (4), (20) и $\omega \in H$ - заданный элемент. Тогда существует плотное подмножество G пространства H такое, что для любого $\omega \in G$ при $\alpha > 0$ вариационная задача (19) имеет единственное решение.

Теорема 5. Пусть функции $a(x), \phi(x), y(x)$ удовлетворяют условиям (4), (20) и $\alpha \geq 0$ - заданное число. Тогда вариационная задача (19) имеет хотя бы одно решение для любого $\omega \in H$.

В этом параграфе изучается также корректность вариационной постановки обратной задачи для нелинейного уравнения типа Шредингера с граничным наблюдением, когда отыскиваемые коэффициенты являются вещественнозначными измеримыми ограниченными функциями. При этом доказываются аналогии теорем 4 и 5.

В параграфе 2.2 исследуется необходимое условие для решения вариационной задачи (19). Пусть $\Phi = \Phi(x, t)$ является решением следующей сопряжённой задачи:

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - a(x)\Phi - v_0(x)\Phi - v_1(x) \left(2|\psi|^2 \Phi + (\psi)^2 \bar{\Phi} \right) = 0, (x, t) \in \Omega, \quad (21)$$

$$\Phi(x, T) = -2i(\psi(x, T) - y(x)), x \in (0, l), \quad (22)$$

$$\Phi(0, t) = \Phi(l, t) = 0, t \in (0, T), \quad (23)$$

где $\psi = \psi(x, t) = \psi(x, t; v)$ - решение прямой задачи (1)-(3) при $v \in V$.

Определение 6. Под решением сопряжённой задачи (21)-(23) понимается функция $\Phi(x, t)$ из пространства $C^0([0, T], L_2(0, l))$, удовлетворяющая тождеству:

$$\int_{\Omega} \left[\Phi(x, t) \left(-i \frac{\partial \bar{\eta}_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 \bar{\eta}_1}{\partial x^2} - a(x) \bar{\eta}_1 - v_0(x) \bar{\eta}_1 \right) - v_1(x) \left(2|\psi|^2 \Phi \bar{\eta}_1 + \psi^2 \bar{\Phi} \right) \right] dx dt = \quad (24)$$

$$= -2 \int_0^l (\psi(x, T) - y(x)) dx$$

для любой функции $\eta_1 = \eta_1(x, t)$ из $W_2^{0,2,1}(\Omega)$ и $\eta_1(x, 0) = 0$. Введем функцию Гамильтона-Понтрягина для вариационной задачи (19):

$$H \left(x, \psi(x, \cdot), v(x), \bar{\Phi}(x, \cdot) \right) = \int_0^T \text{Re} \left(\psi(x, t) \bar{\Phi}(x, t) \right) dt v_0(x) + \quad (25)$$

$$+ \int_0^T \text{Re} \left(|\psi(x, t)|^2 \psi(x, t) \bar{\Phi}(x, t) \right) dt v_1(x) - \alpha (v_0(x) - a_0(x))^2 - \alpha (v_1(x) - a_1(x))^2,$$

где $\psi(x, t) \equiv \psi(x, t; v)$ решение прямой, а $\Phi(x, t) \equiv \Phi(x, t; v)$ решение сопряжённой задачи.

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда для того, чтобы $v^* \in V$ было решением задачи (19) необходимо выполнение условия:

$$H \left(x, \psi^*(x, \cdot), v^*(x), \Phi^*(x, \cdot) \right) = \max_{v \in V_0} H \left(x, \psi^*(x, \cdot), v, \bar{\Phi}^*(x, \cdot) \right) \quad (26)$$

для почти всех $x \in (0, l)$, где $V_0 \equiv \{v : v = (v_0, v_1), |v_m| \leq b_m, m = 0, 1\}$, $\psi^*(x, t) \equiv \psi(x, t; v^*)$, $\Phi^*(x, t) \equiv \Phi(x, t; v^*)$ соответственно решения прямой и сопряженной задач.

Теорема 7. Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда функционал $J_{\alpha}(v)$ дифференцируем по Фреше на множестве V , и для градиента функционала справедливо выражение:

$$J'_\alpha(v) = -\left(\frac{\partial H}{\partial v_0}, \frac{\partial H}{\partial v_1}\right), \quad (27)$$

где $H = H(x, \psi, v_0, v_1, \bar{\Phi})$ функция Гамильтона-Понтрягина для задачи (19).

С помощью этого утверждения установлено, что справедлива

Теорема 8. Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда для того, чтобы $v^* \in V$ было решением вариационной задачи (19) необходимо выполнение условия:

$$\int_0^l \left\{ \int_0^T \operatorname{Re}(\psi^*(x, t) \bar{\Phi}^*(x, t)) dt - 2\alpha(v_0^*(x) - \omega_0(x)) \right\} (v_0(x) - v_0^*(x)) + \\ + \int_0^T \left\{ \operatorname{Re}(|\psi^*(x, t)|^2 \psi^*(x, t) \bar{\Phi}^*(x, t)) dt - 2\alpha(v_1^*(x) - \omega_1(x)) \right\} (v_1(x) - v_1^*(x)) dx \leq 0 \quad (28)$$

для любого $v \in V$, где $\psi^*(x, t) \equiv \psi(x, t; v^*)$, $\Phi^*(x, t) \equiv \Phi(x, t; v^*)$ – соответственно решения прямой и сопряженной задач при $v^* \in V$.

В этом параграфе исследуется также вопрос необходимого условия для решения вариационной задачи с граничным наблюдением. При этом установлены аналоги теорем 6-8.

В параграфе 2.3 исследуется вариационная постановка обратной задачи для нелинейного нестационарного уравнения типа Шредингера об определении неизвестных комплекснозначных коэффициентов младшего и нелинейного членов этого уравнения в классе измеримых ограниченных функций. Рассмотрим вариационную задачу о минимизации функционала:

$$J_\alpha(v) = \|\psi(\cdot, T) - y\|_{L_2(0, l)}^2 + \alpha \|v - \omega\|_H^2 \quad (29)$$

на множестве:

$$V \equiv \{v = (v_{01}, v_{02}, v_{11}, v_{12}) : v_{ms} \in L_2(0, l), m=0,1, s=1,2, |v_{0s}(x)| \leq b_s, s=1,2,$$

$$\tilde{d}_1 \leq v_{11}(x) \leq d_1 < 0, 0 < \tilde{d}_2 \leq v_{12}(x) \leq d_2, \forall x \in (0, l)\},$$

при условиях (11), (2), (3).

Теорема 9. Пусть функции $a_0(x), a(x), f(x, t), \varphi(x)$ удовлетворяют условиям (12), (13), (17), а числа $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2$ удовлетворяют условию (16) и $y \in L_2(0, l)$. Тогда существует плотное подмножество G пространства H такое, что для любого $\omega \in G$ и при $\alpha > 0$ вариационная задача (29) имеет единственное решение.

Теорема 10. Пусть выполнены условия теоремы 9. Тогда вариационная задача (29) имеет хотя бы одно решение при $\alpha \geq 0$ и $\forall \omega \in H$.

Далее, в этом параграфе устанавливается необходимое условие для решения задачи (29) в виде вариационного неравенства. Для решения задачи (29) доказывается аналог теоремы 8.

Третья глава посвящена применению разностного метода к решению вариационной постановки обратной задачи для нелинейного уравнения типа Шредингера, когда отыскиваемые коэффициенты являются вещественнозначными функциями. Эта глава состоит из двух параграфов. Сперва рассматривается вариационная постановка обратной задачи для нелинейного уравнения типа Шредингера с финальным наблюдением и изучается вопрос сходимости разностных аппроксимаций по функционалу.

Рассматривается задача о минимизации функционала:

$$J(v) = \|\psi(\cdot, T) - y\|_{L_2(0, l)}^2 \quad (30)$$

на множестве $V \equiv \left\{v = (v_0, v_1), v_m \in L_2(0, l), |v_m(x)| \leq b_m, \forall x \in (0, l), m=0,1\right\}$

при условиях (1)-(3), где $b_0 > 0, b_1 > 0$, – заданные числа, $a(x)$ – заданная вещественнозначная измеримая ограниченная функция, удовлетворяющая условию (4), а $\varphi(x), y(x)$ заданные комплекснозначные измеримые функции удовлетворяющие условиям:

$$\varphi \in W_2^0(0, l), y \in W_2^1(0, l). \quad (31)$$

Для разностной аппроксимации этой задачи область $\bar{\Omega} = [0, l] \times [0, T]$ покроем последовательностью сеток $\{(x_j, t_k)_n\}$. При каждом $n \geq 1$ рассмотрим задачу о минимизации функции:

$$I_n([v]_n) = h \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jN} - y_j|^2 \quad (32)$$

на множестве:

$$V_n \equiv \{[v]_n = ([v_0]_n, [v_1]_n), [v_m] = (v_m^1, v_m^2, \dots, v_m^{M-1}), 0 \leq v_m^j \leq b_m, j = \overline{1, M-1}, m = \overline{0, 1}\}$$

при условиях:

$$i\delta_t \Phi_{jk} + \delta_{xx} \Phi_{jk} - a_j \Phi_{jk} - v_0^j \Phi_{jk} - v_1^j |\Phi_{jk}|^2 \Phi_{jk} = 0, j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N} \quad (33)$$

$$\Phi_{j0} = \varphi_j, j = \overline{0, M} \quad (34)$$

$$\Phi_{0k} = \Phi_{Mk} = 0, k = \overline{1, N}, \quad (35)$$

где

$$y_j = \frac{1}{h} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} y(x) dx, j = \overline{1, M-1},$$

$$a_j = \frac{1}{h} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a(x) dx, j = \overline{1, M-1}, \quad (36)$$

$$\varphi_j = \frac{1}{h} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \varphi(x) dx, j = \overline{1, M-1}, \quad \varphi_0 = \varphi_M = 0. \quad (37)$$

Теорема 11. Для решения разностной схемы (33)-(35) при каждом выбранном $[v]_n \in V_n$ верна оценка:

$$h \sum_{j=1}^{M-1} |\Phi_{jm}|^2 + h \sum_{j=1}^M |\delta_x \Phi_{jm}|^2 \leq c_5 \left(h \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_j|^2 + h \sum_{j=1}^M |\delta_x \varphi_j|^2 + h \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_j|^4 \right), \forall m \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad (38)$$

где $c_5 > 0$ – постоянное число не зависящее от τ, h

Далее в параграфе 3.1 устанавливается оценка погрешности разностной схемы (33)-(35).

Теорема 12. Пусть $\tau > 0$ удовлетворяет условиям:

$$c_6 \leq \frac{\tau}{h} \leq c_7, \quad \tau \leq \frac{1}{8} \left(b_1 \max_{1 \leq j \leq M-1, 1 \leq k \leq N} \left(|\Phi_{jk}|^2 + |\psi_{jk}|^2 \right) \right)^{-1},$$

где $c_6 > 0, c_7 > 0$ постоянные не зависящие от τ, h . Тогда верна оценка:

$$h \sum_{j=1}^{M-1} |z_{jm}|^2 \leq c_8 \left(\beta_{th} + \|Q_n(v) - [v]_n\|^2 \right), \forall m \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad (39)$$

где $c_8 > 0$ – постоянное не зависящее от $\tau, h; \beta_{th} > 0, \beta_{th} \rightarrow 0$ при $\tau, h \rightarrow 0$, $\{z_{jk}\} = \{\Phi_{jk}\} - \{\psi_{jk}\}$, $\{\Phi_{jk}\}$ – решение разностной схемы (33)-(35) при $[v]_n \in V_n$, $\{\psi_{jk}\}$ является усреднением по Стеклову решения прямой задачи (1)-(3) при $v \in V$,

$$Q_n(v) = [w]_n = ([w_0]_n, [w_1]_n), [w_m]_n = (w_{m1}, w_{m2}, \dots, w_{mM-1}), m = \overline{0, 1}$$

$$w_{mj} = \frac{1}{h} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} v_m(x) dx, m = \overline{0, 1}, j = \overline{1, M-1}.$$

$$\|Q_n(v) - [v]_n\|^2 = h \sum_{m=0}^1 \sum_{j=1}^{M-1} |w_{mj} - v_m^j|^2$$

Далее в этом параграфе устанавливается сходимость разностных аппроксимаций по функционалу. С этой целью сначала доказана:

Теорема 13. Пусть выполнены условия теоремы 12. Тогда для любого $v \in V$ и любого $[v]_n \in V_n$ справедлива оценка:

$$|J(v) - I_n([v]_n)| \leq c_9 \left(\sqrt{\tilde{\beta}_{th}} + \|Q_n(v) - [v]_n\| \right), \quad (40)$$

где $c_9 > 0$ – постоянная не зависит от $\tau, h, \tilde{\beta}_{th} = \beta_{th} + \tau + h$.

Используя эту теорему, доказаны следующие теоремы.

Теорема 14. Пусть выполнены условия теоремы 12. Тогда $Q_n(v) \in V_n$ и имеет место оценка:

$$|J(v) - I_n(Q_n(v))| \leq c_9 \sqrt{\tilde{\beta}_{th}}, n = 1, 2, \dots \quad (41)$$

Теорема 15. Пусть выполнены условия теоремы 12. Пусть, кроме того, оператор $P_n([v]_n)$ определяется формулой:

$$P_n([v]_n) = (P([v_0]_n), P_n([v_1]_n)) = \tilde{v}(x) = (\tilde{v}_0(x), \tilde{v}_1(x)) = v^j = (v_0^j, v_1^j),$$

$$x_j - \frac{h}{2} \leq x \leq x_j + \frac{h}{2}, j = \overline{1, M-1}, \forall [v]_n \in V_n \quad (42)$$

Тогда $\tilde{v}(x) = P_n([v]_n)$ принадлежит V и имеет место оценка:

$$|J(P_n([v]_n)) - I_n([v]_n)| \leq c_9 \sqrt{\tilde{\beta}_{th}}, n = 1, 2, \dots \quad (43)$$

Теорема 16. Пусть выполнены условия теоремы 12. Пусть, кроме того, $v^* \in V$ и $[v]_n^* \in V_n$ являются решениями задач (30) и (32)-(35) соответственно и

$$J_* = J(v^*) = \inf_{v \in V} J(v), I_{n*} = I_n([v]_n^*) = \inf_{[v]_n \in V_n} I_n([v]_n).$$

Тогда последовательность разностных задач (32)-(35) аппроксимирует задачу (30), то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n*} = J_* \quad (44)$$

И справедлива оценка:

$$|J_* - I_{n*}| \leq c_9 \sqrt{\tilde{\beta}_{th}}, n = 1, 2, \dots \quad (45)$$

В параграфе 3.2 изучается вопрос о сходимости разностного метода решения вариационной задачи для нелинейного уравнения типа Шредингера с граничным наблюдением. При этом доказаны аналоги теорем 11-16 и аналоги оценок о скорости сходимости разностных аппроксимаций по функционалу.

Основные научные выводы диссертации

В первой главе диссертации установлены следующие результаты:

- доказаны теоремы существования и единственности почти всюду решения первой и второй начально-краевых задач для нестационарного и нелинейного уравнения типа Шредингера с вещественнозначными коэффициентами.

- доказаны теоремы существования и единственности почти всюду решения первой и второй начально-краевых задач для нелинейного уравнения типа Шредингера с комплекснозначными коэффициентами.

- доказаны оценки коэффициентной устойчивости решения первой и второй начально-краевых задач для нестационарного нелинейного уравнения типа Шредингера с вещественнозначными коэффициентами.

Во второй главе диссертации получены следующие результаты:

- доказаны теоремы существования и единственности решения, установлены необходимые условия в виде принципа максимума Понтрягина и вариационного неравенства, а также найден градиент целевого функционала об определении вещественнозначных коэффициентов нелинейного уравнения типа Шредингера с финальным и граничным наблюдениями.

- доказаны теоремы существования и единственности и установлено необходимое условие в виде вариационного неравенства для вариационной постановки обратной задачи об определении комплекснозначных коэффициентов нелинейного уравнения типа Шредингера по финальному наблюдению.

В третьей главе диссертации получены следующие результаты:

- доказаны оценки устойчивости и погрешности решения разностной схемы и установлена оценка о сходимости разностных аппроксимаций по функционалу для вариационной постановки обратной задачи об определении вещественнозначных коэффициентов нелинейного уравнения типа Шредингера по финальному наблюдению.

- доказана оценка о скорости сходимости разностных аппроксимаций по функционалу для вариационной постановки обратной задачи об определении вещественнозначных коэффициентов нелинейного уравнения типа Шредингера по граничному наблюдению.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Ягубов Г. Я., Мусаева М. А. О вариационном методе решения многомерной обратной задачи для нелинейного нестационарного уравнения Шредингера // Изв. АН Азерб. Сер. физ.-техн. и матем. наук, 1994, т. XV, № 5-6, с. 58-61.
2. Yagubov G. Y., Musayeva M.A. The difference method for solving of multivariable statement of one inverse problem for nonlinear Schrodinger equation // Proceedings of NASA, series of phys-math Scs. (1995), 1-2, p 46-59.
3. Ягубов Г. Я., Мусаева М. А. Задача идентификации для нелинейного уравнения Шредингера // Деп. в Аз НИИТИ, 1996, № 2344-Аз, 15 с.

4. Ягубов Г. Я., Мусаева М. А. Обратная задача для нелинейного уравнения Шредингера // В сб. «Проблемы прикладной математики и кибернетики», Киев, 1997, т. 84, с. 37-41.
5. Ягубов Г. Я., Мусаева М. А. Оптимальное управление потенциальной функцией в нелинейном уравнении Шредингера // Труды ИММ НАНА, 1997, т. 6, с. 195-198.
6. Ягубов Г. Я., Мусаева М. А. Об одной задаче идентификации для нелинейного уравнения Шредингера // Дифференц. уравнения, 1997, т. 33, № 12, с. 1691-1698. English translation: Yagubov G.Y., Musayeva M.A. About the problem of identification for Nonlinear Schrodinger equation // J. Diff. equation, 33, (1997), p.1691-1698.
7. Yagubov G. Y., Musayeva M.A. The inverse problem for nonlinear Schrödinger equation // Journal of Mathematical Science, vol 97, N 2, 1999
8. Мусаева М.А. Задача идентификации комплекснозначных коэффициентов нелинейного уравнения Шредингера // Вестник Ленкоранского Государственного Университета, серия математики и естественных наук, 2011, стр.60-79.
9. Мусаева М. А. Об одной задаче идентификации об определении комплекснозначных коэффициентов одномерного нелинейного нестационарного уравнения Шредингера // Материалы конференции “Стратегия развития Азербайджана и актуальные научные проблемы”, Ленкоранский гос. ун-та., 2012, Ленкорань, с. 28- 31
10. Ягубов Г.Я., Мусаева М.А. Задача идентификации для уравнения Шредингера по граничному наблюдению // Вестник Ленкоранского Государственного Университета, серия математики и естественных наук, 2012, стр.42-64.
11. Iskenderov A.D., Yagubov G.Y., Musayeva M.A. Identification problem for the Schrodinger equation // Theses of the International conference "Inverse and ill-posed problems of Mathematical Physics" Novosibirsk (Russia), 5-12 august 2012, p.38. Задача идентификации для уравнения Шредингера // Тезисы докладов межд. конф. «Обратные и некорректные задачи математической физики», г.Новосибирск (Россия), 5-12 августа 2012 г., с.38.
12. Ибрагимов Н.С., Мусаева М.А. Об одной задаче идентификации по наблюдению на всей области для нелинейного нестационарного уравнения Шредингера // Вестник Ленкоранского Государственного Университета, серия математики и естественных наук, 2012, стр.17-41.
13. Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я., Ибрагимов Н.С., Мусаева М.А. Об одной задаче идентификации для нелинейного нестационарного уравнения Шредингера по наблюдению на всей области // Тезисы докладов межд. конф. «Проблемы принятия решений в условиях неопределенности», г. Брно (Чехия), 17-21 сентября 2012 г., с.159-161.
14. Искендеров А.Д., Ягубов Г. Я., Мусаева М. А. Идентификация квантовых потенциалов. Баку, Çaşıoğlu, 2012, 528 с.
15. Мусаева М.А. Обратная задача об определении комплексного коэффициента нелинейного нестационарного уравнения Шредингера. // Вестник Ленкоранского Государственного Университета, серия математики и естественных наук, 2013, стр.56-65.

В совместных работах [1-7,10-14] соавторам принадлежат постановки задач и обсуждение результатов, а соискателю принадлежит решения рассматриваемых задач и участия в обсуждениях.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Г.Я.Ягубову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

**Variational method for solving of the inverse problem
for Schrödinger type equation
Summary**

The dissertation thesis devoted to creating variational methods for solving of the inverse problems about determination of unknown coefficients of the nonlinear Schrödinger type equation. Studied the first and second initial boundary direct and corresponding inverse problems for nonlinear Schrödinger type equation. Mine attention is given for determination potential function in Schrödinger type equation. Studying problems arises in studying the quantum and nonlinear processes in modern technology and practices. Studied the questions about correctness of direct and inverse problems proved the necessary conditions in maximum principle and variational inequalities for solution of identification problems. Dissertation thesis consist the introduction part three chapters, references and appendix parts.

Chapter 1 consist the following results:

- the existence and uniqueness theorem almost everywhere solutions of the first and second initial and regional tasks for the nonlinear Schrödinger equation with real-valued coefficients is proved.
- existence and uniqueness theorems almost everywhere solutions of the first and second initial –boundary value problem for the nonlinear Schrödinger equation with complex-valued coefficients are proved.
- coefficient stability estimates of the solution of the first and second initial-boundary value problem for nonlinear Schrödinger equation with real-valued coefficients are proved.

In chapter 2 the following results are received:

- the theorem of existence and uniqueness of and necessary conditions in the maximum principle and variation inequality form are established, the gradient of the quality functionality is found.
- existence and uniqueness theorems are proved and the necessary condition in variation inequality form for the identification of complex-valued coefficients of the nonlinear equation like Schrödinger with final observation is established.

In the chapter 3 considered the differens approcsimation method for solution of the considering invers problem, estimates of stability and error of the solution are established, the convergence of differens approximations respect functionality is proved.

**Şredinger tip tənlik üçün tərs məsələnin variasiya üsulu ilə həlli.
Xülasə**

Dissertasiya işi qeyri-xətti Şredinger tipli tənliyin naməlum əmsallarını təyin etmək üçün tərs məsələnin variasiya üsulu ilə həllinə həsr olunmuşdur. Burada qeyri-xətti Şredinger tipli tənliyi üçün birinci və ikinci başlanğıc sərhəd məsələlərinin həllinin korrektiliyi ilə yanaşı tərs məsələnin həlli üçün müxtəlif zəruri şərtlər isbat edilir. Dissertasiya işi giriş, üç fəsil, ədəbiyyat siyahısı və əlavədən ibarətdir.

Girişdə baxılan məsələnin aktuallığı əsaslandırılır və işin qısa məzmunu təqdim edilir.

Birinci fəsil qeyri-xətti Şredinger tipli tənlik üçün başlanğıc-sərhəd məsələlərinin korrektiliyinin araşdırılmasına həsr olunmuşdur. Burada həqiqi qiymətli və kompleks qiymətli əmsallar halı ayrıca baxılır. Eyni zamanda qeyri-xətti Şredinger tipli tənlik üçün başlanğıc-sərhəd məsələsinin həllinin əmsal dayanıqlığı isbat edilir. Bu fəsildə alınan aprior qiymətlənmələr sonrakı fəsillərdə aparılan isbatlarda istifadə olunur.

İşin ikinci fəslə qeyri-xətti Şredinger tipli tənliyi üçün variasiya üsulunun şərhinə, alınmış variasiya məsələsinin həllinin korrektiliyinə, bu məsələnin həlli üçün maksimum prinsipi və variasiya bərabərsizliyi şəklində zəruri şərtlərin isbatına həsr edilmişdir. Ayrıca paraqraf göstərilən nəticələrin kompleks qiymətli əmsallar halında alınmasına həsr olunmuşdur.

Dissertasiya işinin üçüncü fəslə baxılan tərs məsələnin həlli üçün sonlu fərqlər üsulunun əsaslandırılmasına həsr olunmuşdur. Burada final və sərhəd müşahidələri ayrıca baxılır və hər iki halda sonlu fərqli aproksimasiyaların funksionala görə yığılması haqqında teoremlər isbat olunur.

İşə əlavə iki hissədən ibarətdir:

1. İşdə istifadə olunan əsas işarələrin siyahısı.
2. Qeyri-xətti Şredinger tipli tənlik üçün tərs məsələnin sərhəd müşahidəsinə əsasən variasiya üsulu ilə həlli üçün korrektiliyin isbatı və zəruri şərtlərin alınması. Bu isbatlar final müşahidəsinə analogi olduğundan onlar dissertasiya işində teorem şəklində gətirilir, isbatı isə əlavəyə keçirilmişdir.

**AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ
BAKİ DÖVLƏT UNİVERSİTETİ**

Əlyazma hüququnda

MƏTANƏT ASƏF QIZI MUSAYEVA

**ŞREDİNGER TİP TƏNLİK ÜÇÜN TƏRS MƏSƏLƏNİN
VARIASIYA ÜSULU İLƏ HƏLLİ**

1211.01 - diferensial tənliklər

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiya işinin

AVTOREFERATI

BAKİ – 2014

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

На правах рукописи

Матанат Асаф кызы Мусаева

**ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ
ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА ШРЕДИНГЕРА**

1211.01-дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
Диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

БАКУ – 2014