

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

ПАРВАНА МАЛИК кызы ГАСАНОВА

***МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАЗРУШЕНИЯ
ПО ВРЕМЕНИ НАСЛЕДСТВЕННО
УПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ***

2002.01-Механика деформируемого твердого тела

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

Баку – 2013

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

PƏRVANƏ MALİK QIZI HƏSƏNOVA

İRSİ ELASTİK KONSTRUKSİYALARIN DAĞILMA
PROSESİNİN ZAMANA GÖRƏ MODELLEDİRİLMƏSİ

2002.01-Deformasiya olunan bərk cism mexanikası

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı – 2013

Dissertasiya işi **AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu-nun** «Sürüncəklik nəzəriyyəsi» şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Lətif X.Talıblı**

Rəsmi opponentlər:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Fəxrəddin Q.İsayev**
(Qafqaz Universiteti, Bakı ş.);

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dos. **Əlizadə İ.Seyfullayev**
(AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu).

Aparıcı təşkilat:

Azərbaycan Dövlət Neft Akademiyası

«Tətbiqi mexanika» kafedrası.

Dissertasiyanın müdafiəsi 10 yanvar 2014-cü il saat 14⁰⁰-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün D 01.111 dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: Az 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç. 9.

Avtoreferat göndərilib 25 oktyabr 2013-cü il.

AMEA RMI-nın D 01.111

**Dissertasiya Şurasının
elmi katibi**

dosent Tamilla Həsənova

Работа выполнена в отделе «Теория ползучести» **Института Математики и Механики НАН Азербайджана.**

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, проф. **Лятиф Х.Талыблы**

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, проф. **Фахраддин К. Исаев**
(Кавказский Университет, г.Баку);

кандидат физико-математических наук, доц. **Ализаде И.Сейфуллаев**
(Институт Математики и Механики НАН Азербайджана).

Ведущая организация:

Азербайджанская Государственная Нефтяная Академия
кафедра «Прикладная механика».

Защита диссертации состоится 10 января 2014 г. в 14⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета Д 01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: Az 1141, г.Баку, ул.Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 25 октября 2013 года.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета
Д 01.111 ИММ НАНА
Гасанова

доцент Тамилла

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Известно, что одним из методов изучения объектов окружающего нас мира является метод моделирования, который состоит в создании и исследовании копий (моделей) изучаемых объектов, заменяющий оригинал-объект в условиях эксперимента. Объектами исследования данной диссертационной работы являются конструкции, материалы которых обладают реологическими свойствами. Такие материалы под действием постоянной силы могут находиться достаточно длительное время, после чего происходит их разрушение.

Исследования процессов деформирования и разрушения конструкций из наследственно упругих материалов с применением метода моделирования являются важными с точки зрения прогнозирования этих процессов на длительные времена. Более точное определение напряженно-деформированного состояния и на основе этого, прогнозирование срока службы конструкций зависят от правильной постановки и решения соответствующих задач деформирования и разрушения. Постановке задач об определении напряженно-деформированного состояния наследственно упругих элементов конструкций и методам решения этих задач посвящено значительное число работ. Основные научные вклады в этой области связаны с именами А.А.Ильюшина, Ю.Н.Работнова, М.А.Колтунова, Л.М.Качанова, В.В.Москвитина, Н.Н.Малинина, А.К.Малмейстера, Б.Е.Победри, В.Н.Тамужа, А.Р.Ржаницына, М.И.Разовского, Ю.В.Суворовой, Ю.С.Уржумцева, Г.А.Ванина, А.Я.Гольдмана, В.Г.Громова, С.А.Шестерикова, Дж.Ферри, Р.Шепери, Д.Бленда, Р.Кристенсена, В.Н.Финдли, Дж.Ли, К.Онарана и др.

Данная диссертационная работа посвящена решению конкретных вопросов математического моделирования процессов деформирования и разрушения наследственных элементов конструкций, используемых в различных отраслях промышленности. С использованием метода моделирования изучается процесс длительного разрушения конструкции, которая принимается за оригинальную, путем создания и исследования процесса разрушения модельной конструкции. Непосредственное исследование процесса длительного разрушения в натурных конструкциях представляет трудности. Кроме того, отмеченное исследование требует много времени и средств. При этом под разрушением понимается явление,

выражающееся в образовании трещин в телах, приводящее к их разделению на части, нарушению их сплошности.

В диссертационной работе вопросы моделирования процессов разрушения наследственно упругих тел изучаются в рамках сравнительного анализа процессов разрушения модельных и натурных конструкций. Придерживается кинетическая концепция, предполагается, что процесс разрушения характеризуется некоторой величиной накопленных повреждений и долговечностью. Под моделированием понимается создание в модельной конструкции за ограниченный отрезок времени такое количество накопленных повреждений, какое может иметь натурная конструкция в процессе эксплуатации длительное время.

Актуальность выбранной темы обуславливается необходимостью прогнозирования поведения наследственно упругих конструкций по прошествии значительного времени при определенных внешних воздействиях с применением аналогичных модельных конструкций из более дешевых материалов или из того же материала.

Оптимальное планирование экспериментов при исследовании длительной прочности и долговечности конструкций из наследственно упругих материалов, вместе с тем, надежное контролирование процесса их разрушения и характеристики разрушения также обуславливают актуальность данной темы. Проблема же оптимального планирования экспериментов является очень важной задачей в связи с высокой стоимостью и сложностью проведения их по длительной прочности.

Цель работы. Прогнозирование длительного разрушения натурных наследственно упругих элементов конструкций, которым суждено работать по прошествии значительного времени при заданных внешних воздействиях с использованием опытов, проведенных при ограниченных отрезках времени на аналогичных модельных конструкциях из другого материала; определение параметров экспериментов, которые за короткие интервалы времени могут оценить процесс разрушения исследуемой конструкции.

Научная новизна диссертационной работы:

- точное решение краевой задачи наследственной упругости о действии сосредоточенной силы в бесконечной плоскости;
- точное и приближенное решения краевой задачи наследственной упругости о деформации вращающегося диска;

- условие моделирования длительного разрушения натурной конструкции с помощью аналогичной модельной, когда процесс повреждения натурной конструкции начинается после процесса деформирования;
- математическое моделирование процесса длительного разрушения:
 - а) вертикального полого толстостенного цилиндра, заключенного в жесткую обойму, при перегрузке;
 - б) пластины с круговым отверстием при одноосном растяжении;
 - в) нелинейно наследственно упругого цилиндра при действии внутреннего давления;
 - г) нелинейно наследственно упругого бруса при кручении.

Методы исследований. При решении краевых задач наследственной упругости использованы метод аппроксимаций А.А.Ильюшина, теория интегральных уравнений. При моделировании процессов длительного разрушения применены критерии длительной прочности. При реализации полученных результатов использованы численные методы вычисления.

Достоверность полученных результатов обеспечивается корректностью постановки математических задач и методов их решения, использованием апробированных законов механики, сравнением результатов диссертационной работы с имеющимися решениями в частных случаях, не противоречием их физической сути.

Практическая значимость диссертационной работы состоит в прогнозировании срока службы конструкций, применяемых в различных отраслях промышленности, с использованием экспресс-испытаний на разрушения модельных конструкций.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались: на научно-практической конференции “Современная наука на пороге XXI века: Проблемы, перспективы” (Баку, 2000), на научной конференции, посвященной 70-летию чл.-корр. НАН Азербайджана Я.Дж.Мамедова (Баку, 2001), на международной научной конференции, посвященной 25-летию юбилею Азербайджанского Архитектурно-Строительного Университета (Баку, 2001), на научной конференции, посвященной 85-летию заслуженного деятеля науки, профессора А.Ш.Габибзаде (Баку, 2001), на международной конференции по математике и механике, посвященной 70-летию чл.-корр. НАН Азербайджана, профессора Б.А.Искендерова (Баку, 2006), на международной конференции по математике и механике, посвященной 50-летию Института

Математики и Механики НАН Азербайджана (Баку, 2009), на 12-й международной научно-практической конференции “Технологии ремонта, восстановления и упрощения деталей машин, механизмов, оборудования, инструмента и технологической оснастки от нано до макроуровня” (Санкт-Петербург, 2010), на научном семинаре отдела теории ползучести Института Математики и Механики НАН Азербайджана, на научном семинаре механиков Института Математики и Механики НАН Азербайджана.

Личный вклад автора. Все основные положения диссертационной работы получены автором лично. В работе [1, 9] соавтору принадлежит постановка задачи, в работах [11, 13] соавторам принадлежат постановка задачи и анализ частных случаев.

Публикации. По материалам диссертации опубликованы 13 работ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, выводов и списка литературы, содержащий 103 наименования, 10 рисунков. Объем работы 120 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении сформулирована задача исследования, показана актуальность выбранной темы, приведена научная новизна диссертационной работы, обоснованы достоверность и практическая ценность полученных результатов, а также представлена информация о результатах апробации работы.

В первой главе производится анализ существенных исследований по длительным разрушениям тел с целью сравнения результатов этих исследований с результатами настоящей диссертационной работы. Некоторые результаты рассмотренных работ используются при выполнении исследований вопросов, поставленных в диссертации. Приведены известные эмпирические и теоретические формулы длительного разрушения наследственно упругих тел. Представлены степенная и экспоненциальная аналитические зависимости, которые получены при аппроксимации кривых длительной прочности. Эти зависимости используются в следующих разделах диссертационной работы. Из теоретических результатов приведены критерии длительной прочности А.А.Ильюшина и В.В.Москвитина с целью применения их при

решении задач моделирования процесса разрушения. В результате анализа отмечены, что эти критерии учитывают физически важное явление – влияние истории нагружения на длительную прочность наследственных тел. Здесь же представлены результаты многих экспериментальных работ, где указывается наличие существенного инкубационного периода разрушения, который не учитывается многими критериями длительной прочности. В связи с этим, рассматривается критерий длительной прочности, учитывающий наличие инкубационного периода разрушения и одновременно, истории нагружения наследственных тел. Этот критерий также имеет применение в третьей главе диссертационной работы при моделировании длительного разрушения натурной конструкции с помощью модельной.

Вторая глава посвящена решениям краевых конкретных задач вязкоупругости об определении напряженно-деформированного состояния.

В 2.1 представлена общая постановка задач изотропной линейной вязкоупругости и общие методы решения.

В 2.2 определены компоненты напряжения, деформаций и перемещения, которые возникают во вращающемся кольцевом диске постоянной толщины. Механические свойства материала диска характеризуются соотношениями физически линейной теории вязкоупругости–интегральными уравнениями Вольтерра второго рода. Использованы метод аппроксимации А.А.Ильюшина и решение соответствующей задачи идеальной упругости. Рассмотрен также случай, когда вращающийся диск является сплошным.

Кольцевой диск постоянной толщины с внутренним радиусом a , внешним b вращается с угловой скоростью $\eta(t)$, где t – время. Механические свойства диска характеризуются соотношениями физически линейной теории вязкоупругости.

Использована цилиндрическая система координат (r, φ, z) . Пусть $z = 0$ является срединной плоскостью диска. В силу осевой симметрии имеем: $\sigma_{\varphi z} = 0$, $\sigma_{r\varphi} = 0$. Компоненты $\sigma_{zz} = \sigma_z$ и σ_{zr} в плоскостях, параллельных срединной плоскости, малы по сравнению с компонентами $\sigma_{rr} = \sigma_r$ и $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_\varphi$ плоскостях, нормальных к ней.

Поэтому, примем $\sigma_z \approx 0$, $\sigma_{zr} \approx 0$. Кроме того, компоненты деформации будут: $\varepsilon_{\varphi z} = 0$, $\varepsilon_{r\varphi} = 0$, $\varepsilon_{zr} \approx 0$.

Представлена постановка математической задачи изотропной линейной вязкоупругости применительно к рассматриваемой задаче.

Решение этой задачи имеет вид:

$$\begin{aligned}\sigma_r &\approx \frac{\rho}{16} \left(a^2 + b^2 - r^2 \frac{a^2 b^2}{r^2} \right) \left[7\omega^2(t) - \right. \\ &\quad \left. - 7\omega^2(t) - \frac{G_0}{K} \left(\omega^2(t) - \int_0^t R(t-\tau)\omega^2(\tau)d\tau \right) \right], \\ \sigma_\varphi &\approx \frac{\rho}{16} \left\{ \left[7 \left(a^2 + b^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} \right) - 5r^2 \right] \omega^2(t) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{G_0}{K} \left[3r^2 - \left(a^2 + b^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} \right) \right] \left[\omega^2(t) - \int_0^t R(t-\tau)\omega^2(\tau)d\tau \right] \right\} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{18G_0K} \left\{ (2G_0 - 3K)(\sigma_\varphi - \sigma_r) - 3K \int_0^t \Gamma(t-\tau)(\sigma_\varphi - \sigma_r)d\tau \right\} \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{18G_0K} \left\{ (2G_0 + 6K)\sigma_\varphi + (2G_0 - 3K)\sigma_r + \right. \\ &\quad \left. + (2G_0 - 3K)\sigma_r + 3K \int_0^t \Gamma(t-\tau)(2\sigma_\varphi - \sigma_r)d\tau \right\}, \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{18G_0K} \left\{ (2G_0 + 6K)\sigma_r + (2G_0 - 3K)\sigma_\varphi + \right. \\ &\quad \left. + (2G_0 - 3K)\sigma_\varphi + 3K \int_0^t \Gamma(t-\tau)(2\sigma_r - \sigma_\varphi)d\tau \right\};\end{aligned}$$

В этих формулах G_0 - мгновенный модуль упругости, K - модуль объемной деформации, $R(t)$ - функция наследственности-ядро релаксации. Функция $\Gamma(t)$ является резольвентой $R(t)$.

Перемещение u точек диска находится по следующей известной формуле: $u = r\varepsilon_\varphi$. Из этих формул следует, что напряжения σ_r и σ_φ являются растягивающими. При этом σ_r имеет максимальное значение при $r = \sqrt{ab}$, σ_φ при $r = a$. Пусть $\frac{a}{b} \ll 1$, т.е. рассматриваем очень маленькое отверстие. В этом случае при $r = a$ происходит резкое увеличение σ_φ , что свидетельствует о наличии концентрации напряжения при $r = a$:

$$\sigma_\varphi^{\max} = \sigma_\varphi|_{r=a} \approx \frac{\rho b^2}{8} \left[7\omega^2(t) - \frac{G_0}{K} \left(\omega^2(t) - \int_0^t R(t-\tau)\omega^2(\tau)d\tau \right) \right].$$

Здесь же впервые получена точная формула, определяющая функцию релаксации при растяжении $G(t)$ через $J_1(t)$: -сдвиговой функции ползучести:

$$G(t) = \frac{9G_0K}{G_0 + 3k} \left(1 - \int_0^t \Gamma_K(\tau)d\tau \right),$$

где $\Gamma_K(t)$ -резольвента функции $\frac{6G_0k}{G_0 + 3k} \frac{dJ_1(t)}{dt}$.

В 2.3 сформулирована теорема, которая содержит решение краевой задачи изотропной линейной вязкоупругости о действии сосредоточенной силы в бесконечной плоскости. Используемые в определяющих уравнениях две функции ползучести, соответствующие состояниям сдвига и объемного расширения, принимаются независимыми. Виды этих функций в общем случае не конкретизируются. Представлены формулы для компонент напряжений, деформаций и перемещений.

Рассматривается бесконечная плоскость из линейного изотропного вязкоупругого материала, в некоторой точке которой приложена сосредоточенная сила. Цель здесь состоит в представлении точных формул для компонент тензоров напряжений и деформаций, а также вектора перемещений, возникающих при действии сосредоточенной силы в бесконечной плоскости из материала, свойства которого определяются законами теории линейной изотропной вязкоупругости. Отметим, что соответствующая задача

для плоскости из упругого материала является классической и решение ее имеется в трудах по теории упругости.

Речь идет о бесконечной двусвязной области с внутренней границей, состоящей из одной точки, в которой приложена сосредоточенная сила $P(t)$. Точка приложения силы принята за начала декартовой (x_1, x_2) и цилиндрической (r, θ, z) систем координат. Ось x_1 направлена в направлении действия силы $P(t)$. В рассматриваемой плоскости реализуются плоское напряженное состояние: $\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = 0$; $\sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{zz} = 0$. Отличные от нуля компоненты $\sigma_r, \sigma_{r\theta}, \sigma_\theta, \varepsilon_r, \varepsilon_{r\theta}, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$ являются функциями от r, θ, t . Определяющие уравнения вязкоупругости применительно к этой задаче могут быть представлены в виде:

$$\varepsilon_r - \varepsilon_z = \int_0^t J_1(t-\tau) \frac{\partial(\sigma_r - \sigma_\theta)}{\partial \tau} d\tau \quad (1)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \int_0^t J_1(t-\tau) \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \tau} d\tau \quad (2)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{1}{3} \int_0^t [J_1(t-\tau) - J_2(t-\tau)] \frac{\partial(\sigma_r + \sigma_\theta)}{\partial \tau} d\tau \quad (3)$$

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = \int_0^t J_2(t-\tau) \frac{\partial(\sigma_r + \sigma_\theta)}{\partial \tau} d\tau. \quad (4)$$

Здесь $J_1(t)$ и $J_2(t)$ независимые функции ползучести.

Дифференциальные уравнения равновесия применительно к рассматриваемой задаче будут:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0. \quad (6)$$

Для компонент деформаций $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{r\theta}$ и перемещений u_r, u_θ имеют место кинематические уравнения:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right). \quad (7)$$

Компоненты напряжений удовлетворяют следующим интегральным граничным условиям:

$$2 \int_0^\pi (\sigma_r \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) r d\theta + P(t) = 0$$

$$2 \int_0^\pi (\sigma_r \sin \theta + \sigma_{r\theta} \cos \theta) r d\theta = 0. \quad (8)$$

Предполагается, что вокруг точки приложения силы вырезан элемент, ограниченный цилиндрической поверхностью малого радиуса. Соотношения (8) представляют собою проекции сил, действующих на цилиндрическую границу этого элемента на оси x_1 и x_2 .

Л.Х.Талыблы¹ предложил метод, сводящий задачу теории изотропной линейной вязкоупругости к интегральному уравнению Вольтера второго рода, которое имеет единственное известное решение. В этом методе использование интегральных преобразований не предусматривается. На основании этого метода сформулирована следующая теорема.

Теорема. Точное решение задачи (1)-(8) имеет следующий вид:

$$\sigma_r = \frac{\cos \theta}{r} \left(A(t) - \frac{P(t)}{\pi} \right),$$

$$\sigma_\theta = \frac{\cos \theta}{r} A(t),$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{\sin \theta}{r} A(t)$$

¹ Talybly L.Kh. Boussinesq's viscoelastic problem on normal concentrated force on a half-space surface.//Mechanics of Time Dependent Materials 2010, v.14, №3, p.253-259.

$$\varepsilon_r = -\frac{\cos \theta}{r} \int_0^t J_1(t-\tau) d \left[\frac{P(\tau)}{2\pi} + A(\tau) \right]$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\cos \theta}{r} \int_0^t J_1(t-\tau) d \left[\frac{P(\tau)}{2\pi} - A(\tau) \right]$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{\sin \theta}{r} \int_0^t J_1(t-\tau) dA(\tau)$$

$$\varepsilon_z = \frac{2}{3} \frac{\cos \theta}{r} \int_0^t [J_1(t-\tau) - J_2(t-\tau)] d \left[\frac{P(\tau)}{2\pi} - A(\tau) \right]$$

$$u_r = \frac{\sin \theta}{12} \int_0^t [J_1(t-\tau) + 2J_2(t-\tau)] dP(\tau) + c_1(t) \cos \theta +$$

$$+ c_2(t) \sin \theta - \cos \theta \ln r \int_0^t J_1(t-\tau) d \left[\frac{P(\tau)}{2\pi} + A(\tau) \right]$$

$$u_\theta = \frac{\cos \theta}{12} \int_0^t [J_1(t-\tau) + 2J_2(t-\tau)] dP(\tau) +$$

$$+ \sin \theta \ln r \int_0^t J_1(t-\tau) d \left[\frac{P(\tau)}{2\pi} + A(\tau) \right] + \sin \theta \int_0^t J_1(t-\tau) d \left[\frac{P(\tau)}{2\pi} - A(\tau) \right] +$$

$$+ c_2(t) \cos \theta - c_1(t) \sin \theta + c_3(t) r.$$

Функция $A(t)$ – решение интегрального уравнения:

$$\int_0^t [2J_1(t-\tau) + J_2(t-\tau)] dA(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^t [J_1(t-\tau) + 2J_2(t-\tau)] d \left(\frac{P(\tau)}{2\pi} \right).$$

Функции $c_1(t), c_2(t), c_3(t)$, которые входят в выражения для перемещений u_r, u_θ , находятся из условий закрепления.

Приведено доказательство теоремы. Рассмотрены частные случаи.

В третьей главе исследуются вопросы моделирования процесса длительного разрушения наследственно упругих тел. Моделирование процесса разрушения натурной конструкции производится с использованием процесса разрушения аналогичной модельной

конструкции из другого или же того же материала. Предполагается, что при деформации наследственно упругих тел возникают и накапливаются повреждения, которые при достижении определенного уровня происходит разрушения (нарушение сплошностей) этих тел. При этом не исключается общий случай, т.е. случай, когда процесс накопления повреждений начинается по времени позже процесса деформирования.

Условие создания в модельной конструкции за ограниченный отрезок времени такое количество накопленных повреждений, какое возникает и накапливается в натурной конструкции в процессе эксплуатации длительное время называется условием моделирования. Условие моделирования определяет величины внешних факторов (сил), которые должны быть приложены к модельной конструкции при заданном времени моделирования и наоборот; дает возможность находить время моделирования при заданных внешних сил, действующих натурных и модельных конструкциях.

В 3.1 предложен вариант моделирования во времени процессов разрушения наследственно упругих элементов конструкций, которым суждено работать по прошествии значительного времени при определенных внешних воздействиях, с использованием, например, опытов, проведенных при ограниченных отрезках времени на аналогичных конструкциях из другого материала.

Начальные состояния модели и натуре естественные; в этих конструкциях отсутствуют начальные напряжения и деформации и они не подвергались предшествующему деформированию.

Величины, относящиеся к натуре оставлены без индекса, к модели обозначены с использованием индекса “ M ”. Для осуществления моделирования процесса разрушения при условии $t > t'$, $t_M > t'_M$ получено следующее общее условие моделирования:

$$\begin{aligned} & (1 + m_M) \int_0^{t'_M} \frac{(t'_M - \tau)^{m_M} d\tau}{t_{0M}^{1+m_M}(\sigma_*(\tau, x_\alpha), T_M(\tau, x_\alpha)) - t_{1M}^{1+m_M}(\sigma_*(\tau, x_\alpha), T_M(\tau, x_\alpha))} - \\ & - (1 + m) \int_0^t \frac{(t - \tau)^m d\tau}{t_0^{1+m}(\sigma_*(\tau, x_\alpha), T(\tau, x_\alpha)) - t_1^{1+m}(\sigma_*(\tau, x_\alpha), T(\tau, x_\alpha))} = \\ & = \frac{t_1^{1+m}(\sigma_*(\tau, x_\alpha), T(\tau, x_\alpha))}{t_0^{1+m}(\sigma_*(t, x_\alpha), T(t, x_\alpha)) - t_1^{1+m}(\sigma_*(t, x_\alpha), T(t, x_\alpha))} - \end{aligned}$$

$$-\frac{t_{1M}^{1+m_M}(\sigma_*^M(t_M, x_\alpha), T_M(t_M, x_\alpha))}{t_{0M}^{1+m_M}(\sigma_*^M(t_M, x_\alpha), T_M(t_M, x_\alpha)) - t_{1M}^{1+m_M}(\sigma_*^M(t_M, x_\alpha), T_M(t_M, x_\alpha))}.$$

(9)

Здесь (x_α) – точка, где степень накопленных повреждений максимальна;

t – обычное физическое время; t_M – время моделирования; T – температура, отсчитываемая от некоторой начальной температуры; σ_* – некоторое, так называемое, эквивалентное напряжение, являющиеся функцией инвариантных величин интенсивности напряжений и среднего напряжения; $t_1 = t_1(\sigma_*, T)$, $t_0 = t_0(\sigma_*, T)$ являются экспериментально определяемые функции материала – соответственно время возникновения в материале первых повреждений и время до разрушения при постоянных $\sigma_* = const$, $T = const$; m – экспериментально определяемая константа материала.

Условие моделирования дает возможность моделировать процессы разрушения наследственно упругих элементов конструкций, например, конструкций из металлов при повышенных температурах с помощью конструкций, например, пластмасса, поскольку он содержит достаточное количества произвольных величин. Если задается время моделирования t_M , то из условия моделирования (9) может быть определена σ_*^M и тем самым параметры внешней нагрузки, которая должна прикладываться к модельной конструкции. Если же заданы параметры внешней нагрузки из (9) может быть определено время моделирования t_M .

Материальные функции $t_1 = t_1(\sigma_*, T)$, $t_0 = t_0(\sigma_*, T)$ аппроксимируются следующим образом:

$$t_i = t_{is} \exp \left[\beta_i \left(1 - \frac{\sigma_*}{\sigma_s} \right) + d_i \left(1 - \frac{T}{T_s} \right) \right], \quad (i = 0, 1)$$

где σ_s, T_s – напряжение и температура приведения; $\beta_0, d_0, \beta_1, d_1$ – константы материала; t_{1s}, t_{0s} – соответственно времена до появления в теле повреждений и до разрушения при $\sigma_* = \sigma_s = const$, $T = T_s = const$.

В 3.2 произведено моделирование процесса разрушения нелинейно наследственно упругого цилиндра при действии внутреннего давления; натурный цилиндр с внутренним радиусом a , внешним радиусом b находится под действием внутреннего давления $P(t) = P_0 = const$.

В случае, когда в качестве параметра моделирования задано внутреннее давление в модельном цилиндре P_M , то время нагружения модельной конструкции t_M находится по формуле:

$$t_M = t_{\text{exp}} \left[\frac{\beta_0 f(a, b, r) (P_0 - P_M)}{\sigma_s} \right],$$

где $f(a, b, r)$ – известная функция:

$$f(a, b, r) = 2(1 + \beta) \frac{\bar{r}^{2\beta-2}}{a^{-2\beta-2} - b^{2\beta-2}}$$

Здесь β – константа материала; параметр нелинейного деформирования.

В 3.3 произведено моделирование процесса разрушения при перегрузке вертикального полого толстостенного наследственно упругого цилиндра, заключенного в жесткую обойму. Получено следующее условие моделирования:

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_M} (t_M - \tau)^{m_M} \exp \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \beta_M \frac{\gamma_M}{\sigma_s^M} \left(b_M - \frac{a_M^2}{b_M} \right) n_M(\tau) \right] d\tau = \\ & = C_1 + C_2 \int_0^t (t - \tau)^m \exp \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \beta \frac{\gamma}{\sigma_s} \left(b - \frac{a^2}{b} \right) n(\tau) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение (10) позволяет при заданной величине перегрузки модельного цилиндра $n_M(t)$ определить время моделирования t_M и

наоборот. При этом в полученные соотношения будут входить удельный вес γ , а также механические и геометрические характеристики (C_1, C_2) модельного и натурального цилиндров. Величина перегрузки $n(t)$ изменяется скачком от значения $n = 1$ ($n = 1$ соответствует цилиндру, находящемуся под действием только собственного веса) до значения $n = n_0 \gg 1$, что имеет место только в практике.

Определена величина перегрузки модельного цилиндра от заданного времени моделирования t_M и от механических и геометрических характеристик рассматриваемых цилиндров:

$$n_0^M = \frac{C_1 + C_2 t^{1+m} n_0 L \exp[L(1+m)]}{t_M^{1+m_M} L_M \exp[L_M(1+m_M)]}.$$

Рассмотрены некоторые частные случаи.

Приведены кривые поврежденности и долговечности рассматриваемого цилиндра при $n_0 = 1$ и кривая долговечности при $n_0 = 100$. Представлена зависимость $\frac{n_0^M}{n_0} \sim t_{*M}$. Приведены графики

зависимости $n_0^m / n_0 \sim t / t_M$ для полимерных материалов полиэтилена высокой плотности (ПЭВП: $m = -0,6$) и полиэтилена низкой плотности (ПЭНП: $m = -0,8$).

В 3.4 произведено моделирование процесса разрушения наследственно упругой пластины с круговым отверстием при одноосном растяжении. Задача решается в три этапа. На первом этапе исследуется напряженное состояние, на втором – процесс разрушения, на третьем – производится моделирование разрушения.

Определено время моделирования t_M , в течение которого в модельной пластине при заданном напряжении накапливаются повреждения в количестве, равное количеству накопленных повреждений в точках натурной пластины за время t .

Рассмотрен случай, когда натурная пластина состоит из сплава ЭИ 437Б, модельная – из полимерного материала ПЭВП. При одноосном растяжении натурная пластина имеет температуру 937К, модельная – 323К. Используются экспериментальные данные для

сплава ЭН437Б с использованием экспериментов В.П.Сдобырева и для ПЭВП– полимерного материала с использованием экспериментов А.Я.Гольдмана.

В 3.5 моделирование процесса разрушения нелинейно наследственно упругого бруса при кручении. Найдено время t_M в течение которого в модельном брусе количество накопленных повреждений под действием крутящего момента M_0^M будет равняться количеству накопленных повреждений, которые возникают при действии крутящего момента M_0 в натурном брус при физическом времени t .

ВЫВОДЫ

1. Получено точное аналитическое решение краевой задачи наследственной упругости о действии сосредоточенной силы внутри бесконечной плоскости.
2. Получены приближенное и точное аналитические решения краевой задачи наследственной упругости о деформации вращающегося диска.
3. Выведено общее условие моделирования процесса длительного разрушения наследственно упругой натурной конструкции с использованием процесса длительного разрушения аналогичной модельной конструкции из другого или этого же материала.
4. Произведено моделирование процесса длительного разрушения при перегрузке вертикального полого толстостенного наследственно упругого цилиндра, заключенного в жесткую обойму.
5. Произведено моделирование процесса длительного разрушения наследственно упругой пластины с круговым отверстием при одноосном растяжении.
6. Произведено моделирование процесса длительного разрушения наследственно упругого бруса при кручении.

В заключение, пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю –доктору физико-математических наук, профессору Л.Х.Талыблы за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

**Основные результаты диссертации опубликованы в
следующих работах:**

1. Талыблы Л.Х., Гасанова П.М. О моделировании во времени процессов разрушения наследственно упругих конструкций // Изв. АН Азербайджана, сер. физико-технических и математических наук, 1998, том XVIII, №2, стр.145-148.
2. Гасанова П.М. К вопросу моделирования процесса разрушения нелинейного наследственно упругого толстостенного цилиндра /Материалы научно-практической конференции, “Современная наука на пороге XXI века: Проблемы, перспективы” Баку, 2000, “Ренессанс” с.43-45.
3. Гасанова П.М. Задача моделирования длительного разрушения нелинейно наследственно упругого бруса при кручении / Материалы межд. науч. конф., посвящ. 25-летию юбилею Азерб. Архитектурно-Строительного Университета, Баку, 2001, с.329-331.
4. Hasanova P.M. On one modeling problem of distribution process under overload of vertical hollow thick-walled cylinder included in rigid envelope // Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, 2001, v.XIV (XXII), p.118-121.
5. Гасанова П.М. Моделирование процесса длительного разрушения физически нелинейно наследственно упругого бруса при изгибе / Материалы науч. конф., посвящ. 85-летию заслуж. деят. науки, проф. А.Ш.Габибзаде, Баку, 2001, с.199-200.
6. Gasanova P.M. Time modeling of destruction process of hereditarily elastic plate with circular hole at uniaxial tension // Transactions of NAS of Azerb. ser. of phys.-tech. and mathem. sci. 2002, v. XXII, №1, p.156-193.
7. Гасанова П.М. Моделирование процесса длительного разрушения вращающегося вязкоупругого диска постоянной толщины / Тезисы XII межд. конф. по математике и механике, посв. 70-летию чл.-корр. НАНА, проф. Б.А.Искендерова, 2006, с.63.
8. Гасанова П.М. Напряженно-деформированное состояние физически линейного вязкоупругого вращающегося диска // Механика-машиностроение. Баку, 2006, №2, с.15-17.
9. Талыблы Л.Х., Гасанова П.М. Деформация вращающейся вязкоупругой сжимаемой трубы / Тезисы межд. конф. по матем. и мех., посвящ. 50-летию Ин-та Математики и Механики НАНА, 2009, с.289.

10. Гасанова П.М. Деформация вязкоупругого вращающегося диска из сжимаемого материала / Материалы 12-й Междун. науч.-прак. конф., Санкт-Петербург, 2010, т.2, с.250-254.
11. Гасанова Л.А., Гасанова П.М., Талыблы Л.Х. Решение краевой задачи вязкоупругости о действии сосредоточенной силы в бесконечной плоскости //Изв. РАН, Механика твердого тела (МТТ), 2011, №5, с.137-143.
12. Гасанова П.М. К моделированию процесса разрушения наследственно упругого бруса при кручении / Тезисы научной конференции, посвященной 70-летию чл.-корр. НАН Азерб. профессора Я.Дж. Мамедова. Бакинс. Государс. Университет, Баку, 2011, с.170-171.
13. Talybly L.Kh., L.A.Gasanova, P.M.Gasanova. Solution of a viscoelastic boundary value problem on the action of a concentrated force in an infinite plane. Machenics of Solids. 2011, v.46, №5, p.772-778.

**İRSİ ELASTİK KONSTRUKSİYALARIN DAĞILMA
PROSESİNİN ZAMANA GÖRƏ MODELLEŞDİRİLMƏSİ**

X Ü L A S Ə

Dissertasiya işi irsi elastik materialdan hasırlanmış konstruksiyaların uzun müddətli dağılma proseslərinin uyğun model konstruksiyaların dağılma prosesləri vasitəsilə modelləşdirilməsinə həsr olunmuşdur. İşdə aşağıdakı nəticələr alınmışdır.

- Sonsuz müstəvidə topa qüvvənin təsiri haqqında irsi elastikiyyət nəzəriyyəsinin sərhəd məsələsinin dəqiq həlli verilmişdir;
- Fırlanan diskin deformasiyası haqqında irsi elastikiyyət nəzəriyyəsinin sərhəd məsələsinin təqribi və dəqiq həlli verilmişdir;
- Deformasiya prosesindən sonra baş verən zədələnmə prosesi nəticəsində natur konstruksiyanın uzun sürən dağılmasının model konstruksiyanın dağılması vasitəsilə modelləşdirilməsi şərti çıxarılmışdır;
- Aşağıdakı konstruksiyaların uzun sürən dağılma prosesinin riyazi modelləşdirilməsi həyata keçirilmişdir:
a) qalın divarlı içi boş xaricdən bərkidilmiş silindrin şauquli hərəkəti zamanı dağılmasının modelləşdirilməsi, b) dairəvi dəşiyi olan lövhənin bir oxlu dartılmada modelləşdirilməsi; c) qeyri-xətti irsi elastik silindrin daxili təzyiq təsirindən dağılmasının modelləşdirilməsi, d) qeyri-xətti irsi elastik tirin burulma zamanı dağılmasının modelləşdirilməsi.

PARVANA MALIK KIZI HASANOVA

**MODELLING OF FAILURE PROCESS OF HEREDITARY
ELASTIC CONSTRUCTIONS WITH RESPECT TO TIME**

SUMMARY

The dissertation work is devoted to modeling of long term failure processes of constructions made of hereditary elastic materials by means of failure processes of appropriate model constructions.

The following results were obtained:

- Exact solution of a boundary value problem of hereditary elasticity theory on the action of concentrated force at infinite plane;
- Approximate and exact solution of a boundary value problem of hereditary elasticity on deformation of a rotating disk;
- The condition of delayed failure modeling of a life construction by means of the similar model one when the damage process of the life constructions begins after deformation process;
- Mathematical modeling of delayed failure process:
 - a) of a vertical hollow thick-walled cylinder enclosed in rigid casing at overload;
 - b) of an annular hole plate under uniaxial tension;
 - c) of a nonlinear hereditary elastic beam under torsion.

**НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

На правах рукописи

ПАРВАНА МАЛИК кызы ГАСАНОВА

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАЗРУШЕНИЯ
ПО ВРЕМЕНИ НАСЛЕДСТВЕННО
УПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ**

2002.01-Механика деформируемого твердого тела

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

Баку – 2013