

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

ASLAN DİLƏN OĞLU QULİYEV

İKİ TƏRTİBLİ CİRLAŞAN QEYRİ-XƏTTİ
TƏNLİKLƏRİN HƏLLƏRİNİN KEYFİYYƏT
XASSƏLƏRİNİN TƏDQIQI

1211.01-Diferensial tənliklər

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı - 2013

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

АСЛАН ДИЛАН оглы КУЛИЕВ

***ИССЛЕДОВАНИЕ КАЧЕСТВЕННЫХ СВОЙСТВ
РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НЕЛИНЕЙНЫХ
УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА***

1211.01- Дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

Баку – 2013

Dissertasiya işi **AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun “Riyazi fizika tənlikləri”** şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru **Fərman İ.Məmmədov**

Rəsmi opponentlər:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Əkbər B.Əliyev**
(Azərbaycan Texniki Universiteti);

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dos. **Əbdürrəhim F.Quliyev**
(AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu).

Aparıcı təşkilat:

Bakı Dövlət Universiteti

«Diferensial və integral tənliklər» kafedrası.

Dissertasiyanın müdafiəsi 10 yanvar 2014-cü il saat 16⁰⁰-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün D 01.111 dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç. 9.

Avtoreferat göndərilib 12 noyabr 2013-cü il.

AMEA RMI-nın D 01.111

**Dissertasiya Şurasının
elmi katibi**

dos. Tamilla Həsənova

Работа выполнена в отделе «Уравнения математической физики» **Института Математики и Механики НАН Азербайджана.**

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук

Фарман И.Мамедов

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, проф. **Акпер Б.Алиев**
(Азербайджанский Технический Университет);

кандидат физико-математических наук **Абдуррагим Ф.Гулиев**
(Институту Математики и Механики НАН Азербайджана).

Ведущая организация:

Бакинский Государственный Университет

кафедра «Дифференциальные и интегральные уравнения».

Защита диссертации состоится 10 января 2014 г. в 16⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета Д 01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г.Баку, ул.Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 12 ноября 2013 года.

Ученый секретарь

Диссертационного Совета
Д 01.111 ИММ НАНА

доц. Тамилла Гасанова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Многие стационарные задачи электростатики, теории фильтрации жидкости через пористую среду, электродинамики, газовой динамики, теории броуновского движения и другие задачи приводят к необходимости исследования различных краевых задач для линейных и нелинейных уравнений эллиптического типа. Фундаментальные результаты и важные направления по теории эллиптических уравнений с частными производными нашло свое исчерпывающее отражение в монографиях Д.Гильбарга, Н.Трудинера, Е.М.Ландиса, О.А.Ладыженской, Н.Н.Уральцевой, И.В.Скрынника, А.Куфнера, К.Фучика, К.Миранда, В.П.Михайлова, П.Драбека, А.Куфнера, Ф.Николози, Ж.Лионса, Н.В.Крылова, В.А.Кондратьева и М. Борсука и др.

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию качественных свойств решений нелинейных вырождающихся уравнений вида

$$\operatorname{div} A(x, u, \nabla u) = B(x, u, \nabla u). \quad (1)$$

А именно, для таких уравнений изучаются вопросы существования обобщенного решения задачи Дирихле в весовых пространствах Соболева $W_{p,\omega}^1(D)$, ограниченность обобщенного решения, устранимые множества, сингулярные особенности. Упомянутые вопросы достаточно хорошо изучены в случае линейных уравнений и некоторых квазилинейных уравнений без вырождения.

Развитие аналогичных подходов для квазилинейных уравнений, имеющих двойное вырождение - по градиенту решения и по координатной переменной, потребовало создания соответствующих подходов. Отметим, в этой связи доказанную в диссертации лемму возрастания и лемму среднего значения. Доказательства таких лемм актуальны не только с точки зрения применимости к рассмотренным в настоящей диссертации задачам, но, а также представляют самостоятельный интерес с точки зрения их применения в теории функций.

Диссертационная работа состоит из введения, 2-х глав, и списка литературы.

Основные результаты первой главы посвящены квазилинейным уравнениям.

В параграфе 1.1 первой главы доказан новый нелинейный весовой аналог известной теоремы Ландиса-Гервера о среднем значении¹. Следуя идеям монографии Е.И.Ландиса² с помощью этой теоремы доказывается лемма о возрастании положительных решений уравнений (1) в узких областях. Полученная лемма возрастания позволяет изучить поведение решений уравнения (1) в неограниченных областях и в окрестности особой точки.

Доказанный в диссертации новый нелинейный аналог теоремы Ландиса-Гервера позволяет исследовать вопросы устранимости множеств для класса решений уравнения (1) в пространствах C^α (Гельдера порядка $0 < \alpha < 1$) в параграфе 1.4 первой главы. Этот результат является обобщением на вырождающиеся и квазилинейные уравнения типа (1) соответствующей теоремы Л.Карлесона³, для гармонических функций. В терминах меры Каратеодори (зависящей от функции вырождения $\omega(x)$ и порядка нелинейности p) найдено достаточное условие устранимости множества E для решений уравнения (1) в классах C^α .

В частности доказано, что для устранимости множества E в классе C^α $0 < \alpha < 1$ решений нелинейного p – уравнения Лапласа

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = 0, \quad p > 1, \quad (2)$$

достаточно, чтобы мера Хаусдорфа множества E порядка $n - p + (p-1)\alpha$ равнялся нулю. Заметим, что этот результат является

¹ Гервер М.Л., Ландис Е.М. Одно обобщение теоремы о среднем для функций многих переменных / ДАН СССР, т. 146, № 4, 1962, с. 761-764.

² Ладыженская О.А., Уралцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.

³ Карлесон Л. Избранные главы теории исключительных множеств. М.: 1971, 126 с.

основным утверждением, работы И.Килпелайнен и Х.Зонг⁴ опубликованной после нашей работы⁵. Нами рассмотрено более общее уравнение, причем главная часть может содержать вырождение по переменной x (функцию $\omega(x)$).

Вторая глава посвящена оценкам полулинейных уравнений и другим результатам. При помощи доказанной в главе 1 леммы возрастания для узких областей (теорема 1.2.1), во второй главе изучаются локальные и глобальные свойства решений нелинейных вырождающихся неравенств вида

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\omega(x) |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \geq f(x, u), \quad (3)$$

где $\text{sign } u \cdot f(x, u) \geq a_0 |u|^{q+1}$, $a_0 > 0, p \geq 1, -1 < q < \infty$. В параграфе 2.1 для сингулярных решений уравнения (3), показывается оценка

$$|u(x)| \leq C |x - x_0|^{\frac{-p}{q-p+2}}, \quad (4)$$

при $q > p-2$, где $C > 0$ не зависит от функции u , точки x_0 , параметров, p, q . Функция вырождения $\omega(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_{Q_\rho^x} \omega(x) dx \leq C \rho^n; \quad (5)$$

Q_ρ^x – шар с центром в точке x радиуса ρ , $C > 0$ не зависит от $x, \rho > 0$.

В случае $-1 < q < p-2$, $p > 1$ доказывается, что существует постоянная $\beta > 0$ зависящая только от n, p, q и постоянной C из

⁴ Kilpelainen T., Zhong X. Removable sets for continuous solutions of quasilinear elliptic of equations // Proc. Amer. Math. 2002, v. 130, № 6, p.1681-1688

⁵ Mamedov F.I., Quliyev A.D. On the nonlinear weight analogue of the Landis-Gervers type mean value theorem and its applications to quasilinear equations.// **Proceedings of Azerbaijan National Academy of Science**, Ser. Mech.-math., 2000, v. X II (XX), p. p.74- 81. (www.imm.science.az)

условия (5) такая, что всякое решение уравнения (3), ограниченное по модулю числом β в области D , будет тождественно равным нулю.

Заметим, что эти результаты в случае уравнения (3) с линейной главной частью ($p=2$) и при отсутствии вырождения ($\omega(x) \equiv 1$) ранее были изучены Ландисом и Кондратьевым в работе⁶. Локальные и глобальные свойства решений линейных уравнений с дополнительными ограничениями на поведение фундаментального решения еще раньше были изучены Брезисом, Вероном, Брезисом и Вероном, Келлером, Оссерманом, Похожаевым.

В последнее время А.А.Коньковым, Кондратьевым и Коньковым⁷, в сериях работ были изучены поведения решений линейных уравнений вида (3), (случай $p=2, \omega(x) \equiv 1$), в которых правая часть произвольная функция $f(u)$, зависящая от решения $u(x)$, т.е. обобщаются известные результаты Ландиса-Кондратьева, на случай не степенного роста по решению $u(x)$.

В ряде работ ими исследованы оценки решений вблизи особой точки и в окрестности бесконечно удаленной точки, зависящие от функции $f(u)$.

В параграфе 2.2 второй главы исследуется вопрос ограниченности обобщенного решения задачи Дирихле для уравнения (1). Получена новая априорная оценка типа принципа максимума Александрова, для вырождающихся квазилинейных уравнений, оценивающая максимум решения через весовую Лебеговскую норму правой части уравнения.

В параграфе 2.3. второй главы изучаются вопросы гладкости нелинейного потенциала Адамса-Мазьи

⁶ Кондратьев В.А., Ландис Е.М. О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Мат. Сбор., т. 135 (177), № 3, с. 346-360.

⁷ Кондратьев В.А., Коньков А.А. О свойствах одного класса нелинейных уравнений второго порядка // Мат. сбор. 1994, т. 185, № 9, с. 81-94.

$$u_{\mu}(x) = \int_{R^n} \frac{dy}{|x-y|^{n-1}} \left[\int_{R^n} \frac{d\mu(z)}{|y-z|^{n-1}} \right]^{\frac{1}{p-1}}, \quad (6)$$

в зависимости от модуля непрерывности меры μ . Где в частности доказывается, что если мера μ таково, что ее потенциал (6) конечный, и

$$\mu(Q_{\rho}^x) \leq C\rho^{n-p+(p-1)\alpha} \quad (7)$$

то он принадлежит C^{α} ($0 < \alpha < 1$), где $C > 0$ не зависит от $x \in R^n, \rho > 0$;

Параграф 2.4 посвящен вопросам эквивалентности весовых L_p оценок для потенциалов Рисса к соответствующим весовым теоремам вложения, где показывается, что весовая теорема вложения эквивалентна двухвесовой оценке для потенциала Рисса

$$I_f(f) = \int_{R^n} |x-y|^{1-n} f(y) dy$$

(для весовых случаев $\omega(x)$ -с условием A_p -Маккенхаупта).

Цель работы. Цель диссертации состоит в исследовании качественных свойств решений класса квазилинейных эллиптических уравнений имеющих двойное вырождение – по градиенту решения и по координатной переменной. Изучение вопросов существования и ограниченности обобщенного решения задачи Дирихле в весовых пространствах Соболева $W_{p,\omega}^1(D)$ для таких уравнений. А также изучение полулинейных уравнений с точки зрения исследования вопросов об устранимых множествах, и сингулярных особенностей.

Общая методика исследования. В работе использованы топологические методы теории функциональных пространств и функционального анализа и методы качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты:

- доказан новый нелинейный весовой аналог известной теоремы Ландиса-Гервера о среднем значении;
- доказана лемма о возрастании положительных решений в узких областях для класса квазилинейных эллиптических уравнений

имеющих двойное вырождение - по градиенту решения и по координатной переменной;

-изучаются качественные свойства решений вырождающихся квазилинейных уравнений в неограниченных областях и в окрестности особой точки;

-исследуются вопросы об устранимых множествах для класса C^α решений вырождающихся квазилинейных уравнений;

-изучаются локальные и глобальные свойства решений полулинейных эллиптических неравенств, главная часть которых имеет вид вырождающегося p - Лапласиана;

-получена априорная оценка типа принципа максимума Александрова, оценивающая максимум решения через весовую Лебегову норму правой части для класса вырождающихся квазилинейных уравнений;

-для класса вырождающихся квазилинейных уравнений исследуется существование обобщенного решения задачи Дирихле в весовых пространствах Соболева $W_{p,\omega}^1(D)$;

- изучаются вопросы гладкости в пространствах Гельдера C^α для нелинейного потенциала Адамса - Мазьи;

- изучаются вопросы эквивалентности весовых L_p оценок для потенциалов Рисса к соответствующим весовым теоремам вложения. Где показывается, при каких условиях, весовая теорема вложения эквивалентна, двух весовой оценке для потенциалов Рисса.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер. Однако полученные результаты могут быть использованы при изучении различных прикладных задач математической физики, описывающихся нелинейными эллиптическими уравнениями второго порядка. Результаты диссертации могут служить полезным инструментом для обоснования сходимости численных процедур при численном решении нелинейных краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинаре член-корр. НАН Азербайджана, проф Б. А. Искендерова, на общеполитинститутском семинаре ИММ НАН Азербайджана, на семинаре кафедры «Уравнения математической физики» БГУ (руководитель-член-корр. НАН Азербайджана, проф Ю. А. Мамедов), на семинаре

кафедры «Дифференциальные и интегральные уравнения» БГУ (руководитель: проф. Г.К.Намазов), на семинаре отдела «Нелинейного гармонического анализа» ИММ НАН Азербайджана (руководитель: проф. Б.Т.Билалов), на X Международной конференции по математике и механике, посвященной 45-летию Института Математики и Механики НАН Азербайджана(2004), на Международной конференции посвященной 50-летию член-корр. НАН Азербайджана, профессора И.Т.Мамедова (2005), на Международной конференции, посвященной 70 летию член-корр. НАН Азербайджана, профессора Б. А. Искендерова (2006).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 работ, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения и двух глав и изложена на 140 страницах. Включая введение и список литературы, включающей 75 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Прежде чем сформулировать основные результаты диссертации условимся о некоторых обозначениях и определениях.

$C^\infty(\overline{D})$ - пространство бесконечно дифференцируемых функций в $\overline{D}$. $C_0^\infty(D)$ - пространство бесконечно дифференцируемых функций в $\overline{D}$ с компактным в D носителем. Пространство измеримых в области D функций $u(x)$ с конечной нормой

$\|u\|_{L_{p\omega}(D)} = \left(\int_D \omega(x) |u|^p dx \right)^{1/p}$ обозначим $L_{p\omega}(D)$; запись $\|u\|_{p\omega, D}$ или

$\|u\|_{p\omega}$ означают норму $\|u\|_{L_{p\omega}(D)}$. Пусть $W_{p\omega}^1(D)$ и $\overset{\circ}{W}_{p\omega}^1(D)$ - замыкания пространства функций из $C^\infty(D)$ и $C_0^\infty(D)$ соответственно, по норме

$$\|u\|_{W_{p\omega}^1(D)} = \left(\int_D |u|^p \omega(x) dx \right)^{1/p} + \left(\int_D \omega(x) |\nabla u|^p dx \right)^{1/p},$$

где $p \in [1, \infty)$, $|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^n (\partial u / \partial x_i)^2 \right)^{1/2}$. $W_p^2(D)$ - пространство функций заданных D , с конечной нормой:

$$\|u\|_{W_p^2(D)} = \|u\|_{L_p(D)} + \sum_{i=1}^n \|\partial u / \partial x_i\|_{L_p(D)} + \sum_{i,j=1}^n \|\partial^2 u / \partial x_i \partial x_j\|_{L_p(D)}, \quad 1 \leq p < \infty$$

Пространство, сопряженное к $W_{p\omega}^1(D)$ обозначим через $W_{p'\omega}^{-1}(D)$, где

$$W_{p'\omega}^{-1}(D) = \left\{ T = f + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} : f \in L_{p'\omega^{1-p'}}(D), f_i \in L_{p'\omega^{1-p'}}(D), i = 1, \dots, n \right\}$$

Для $1 < p < \infty$ запись p' обозначает сопряженное число, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Для измеримой функции $\omega(x)$ и измеримого множества

$$E \subset R^n \text{ обозначим } \omega(E) = \int_E \omega(x) dx. \text{ Обозначим также через } |E|$$

меру Лебега множества E .

Условие A_p ($1 \leq p < \infty$). Будем говорить, что измеримая неотрицательная функция $\omega(x)$ удовлетворяет условию A_p , $1 < p < \infty$, если для любого

шара $Q \subset R^n$ справедливо неравенство

$$\left((1/|Q|) \int_Q \omega(x) dx \right) \left((1/|Q|) \int_Q \omega^{-1/p-1}(x) dx \right)^{p-1} \leq C,$$

Условие A_1 . Найдется $C > 0$ такое, что для любого шара $Q \subset R^n$ справедливо неравенство $(1/|Q|) \int_Q \omega(x) dx < C \inf_Q \omega$, где

$C > 0$ не зависит от шара Q .

Условие A_∞ . Найдутся, $C, \delta > 0$ что для любого шара $Q \subset R^n$ и его компактного подмножества E выполняется неравенство $\omega(E)/\omega(Q) \leq C(|E|/|Q|)^\delta$

Условие A_{pq} . Будем говорить, что пара весов (v, ω) удовлетворяет условию

$A_{p,q}$, $((v, \omega) \in A_{p,q})$, если найдется $C > 0$ такое, что $|Q|^{1/n-1} \left(\int_Q v dx \right)^{1/q} \left(\int_Q \omega^{1-p'} dx \right)^{1/p'} \leq C$

(α, ε) -условие. Пусть локально суммируемая функция $\omega(x)$ удовлетворяет условию: существует $\varepsilon > 0$ и $\alpha > 0$, что для любого компакта E из шара Q_R^o , при $R > 0$ выполняется

$$|E|^{p/n-\varepsilon} \left((1/|E|) \int_E \omega(x) dx \right) \left((1/|E|) \int_E \omega^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right)^{p-1} \leq \alpha R^{p-n\varepsilon}.$$

Определение. Пусть E — некоторый компакт в R^n , непрерывная возрастающая функция $h(r)$ такая, что $h(0) = 0$. Пусть $\mu(G)$ — некоторая положительная счетно-аддитивная мера, определенная на всех Борелевских подмножествах компакта E' . Покроем множество E счетным набором шаров B_v радиуса $r_v \leq \rho$ центром в точке x_v . Положим $\Lambda_\mu^h(\rho) = \inf \sum_v h(r_v) \mu(B_v)$, где нижняя грань берется по всем покрытиям шарами $\{B_v\}$. Обозначим $\Lambda_\mu^h(E) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \Lambda_\mu^h(\rho)$. В случае $d\mu = dx$, $h(r) = r^{s-n}$, $0 < s < \infty$, $\Lambda_\mu^h(E)$ — дает меру Хаусдорфа $mes_s E$.

Во введении дается обзор тематики в сравнении с известными результатами. Приводятся необходимые определения и обозначения. Перечисляются основные результаты, полученные в диссертации. Первая глава диссертации состоит из 4-х параграфов. В первом

параграфе приводятся предварительные факты и утверждения, используемые в последующих параграфах.

Следующая теорема является нелинейным весовым аналогом аналогичной теоремы Ландиса – Гервера.

Теорема 1. Пусть $1 < p < \infty$, D – ограниченная область лежащая в шаровом слое $R \leq |x| \leq 2R$, и имеющая предельные точки на поверхностях сфер $|x| = R$ и $|x| = 2R$, и $u(x) \in C^2(\bar{D})$. Тогда существует кусочно-гладкая поверхность $\sum$ разделяющая в D сферы $|x| = R$ и $|x| = 2R$, такая, что выполняется неравенство

$$\int_{\sum} \omega(x) |\nabla u|^{p-2} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| d\sigma \leq K \frac{\left(\operatorname{osc}_D \right)^{p-1} \omega(D)}{R^p},$$

где $K > 0$ – некоторая константа, зависящая от размерности пространства n и p, γ .

Применением Теоремы 1, следуя идеям монографии Ландиса Е.М.⁸, разработанной в линейном и не весовом случае, доказывается следующая теорема.

Теорема 2. Пусть в шаре Q_R^0 радиуса R с центром в точке 0 и имеющая предельные точки на поверхности сфере S_R . Пусть Γ – та часть границы области D , которая расположена строго внутри шара Q_R . Пусть $u \equiv \{u_j\}$ неотрицательное решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\omega(x) |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = 0, \quad (8)$$

обращающееся в нуль на Γ . Пусть далее выполняется (α, ε) - условие. Тогда существует константа M , зависящая только

⁸ Ландис Е.М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: 1971. 287 с.

$n, \alpha, p, \varepsilon$ такое, что если $|D| < \frac{|Q_R|}{M}$, то, выполняется неравенство

$$u(0) < \frac{1}{2} \max_D u(x).$$

Идея статьи ⁹ позволяет выводить следующую теорему из Теоремы 2

Теорема 3. Пусть Q_R — шар радиуса R с центром в точке 0 . Пусть D — область, расположенная внутри шара Q_R , содержащая точку 0 и имеющая предельные точки на границе шара Q_R . Пусть Γ — та часть границы области D , которая расположена строго внутри шара Q_R . Пусть далее, $|D| = \sigma < \frac{|Q|}{M}$, где M константа теоремы 2. Предположим, что $u(x) \in W_p^1(D)$ — положительное в D решение уравнения (8), которая обращается в нуль на Γ . Для функции $\omega(x)$ выполнено условие удвоения и (α, ε) -условие. Тогда

$$u(0) \leq \exp \left\{ -\frac{R^{\frac{n}{n-1}}}{C \sigma^{\frac{n}{n-1}}} \right\} \max_D u(x),$$

где константа C зависит только от n, p и от ε, α .

Применяя приводимые выше Теоремы 2 и 3 получена следующие теоремы, выражающие качественные свойства решений вырождающихся нелинейных уравнений.

Теорема 4. Пусть D — неограниченная область типа телесного угла размера η , а именно, для всех натуральных m ,

⁹ Ландис Е.М. Некоторые вопросы качественной теории эллиптических уравнений второго порядка (случай многих переменных) // УМН. 1963, т. XVIII, № 1 (109), с. 3-63.

начиная с некоторого m_0 , выполняется неравенство $|D \cap Q_{2^m}| < \eta |Q_{2^m}|$, где Q_{2^m} – шар радиуса 2^m с центром в точке 0.

Пусть далее $\eta < \frac{2}{2^n M}$, где M константа теоремы 2.

Предположим, что $u(x) \in \tilde{H}(D)$ положительное в D решение уравнения (8), равное нулю на границе ∂D области D . Относительно $\omega(x)$ выполнено условие удвоения и (α, ε) -условие. Тогда либо 1) $u(x) \leq 0$ всюду в D , либо 2) если положить $M(R) = \max_{|x|=R} u(x)$ то,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{M(R)}{R^{\frac{1}{k\eta^{n-1}}}} > 0, \quad \text{где } k - \text{константа, зависящая только от}$$

α, p, γ и размерности пространства.

Теорема 5. Пусть D – область, имеющая точку O своей предельной точкой. Предположим, что $u(x) \in \tilde{H}(D)$ положительное в D решение уравнения (8), равное нулю на границе ∂D области D . Относительно $\omega(x)$ выполнено условие удвоения и (α, ε) -условие. Далее, пусть существует число η , зависящее от p, α, ε такое, что

$$|D \cap Q_{2^{-m}}^0| \leq \eta |Q_{2^{-m}}^0|$$

для всех номеров m , начиная с некоторого m_0 . Тогда справедлива оценка $M(r) \geq C_1 r^{C_2}$ при $r \rightarrow 0$; константы C_1 и C_2 зависят от $p, n, \alpha, \varepsilon$, а C_1 еще зависит от m_0 , $M(r) = \max_{\substack{|x|=r \\ x \in D}} u(x)$.

Относительно существования обобщенного решения вырождающихся квазилинейных уравнений в весовых пространствах Соболева и их оценкам типа принципа максимума Александрова отметим следующие теоремы.

Теорема 6. Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $V(x) \leq \omega(x)$ п.в., $D \in K_\varepsilon$, $V \in A_\infty$, $(V, \omega) \in A_{pq}$ положим $V = W_p^1(\omega dx, D)$, и пусть

$f \in V'$, а также, выполнены условия на нелинейности:

$$g(x) \in L_{p'}(D), \quad \sum_{i,k}^n a_{ik} u_{x_i} u_{x_k} \geq \omega |u_x|^p ,$$

$$\left| \sum_{i=1}^n a_{ik}(x, u, u_x) u_{x_i} \right| \leq \omega |u_x|^{p-1} + g(x) \omega^{1/p} ,$$

$$\sum_{i=1}^n (a_{ik}(x, u, u_x) u_{x_i} - a_{ik}(x, v, v_x) v_{x_i}) (u_{x_k} - v_{x_k}) > 0 .$$

Тогда существует единственное в классе V решение уравнения

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x, u, Du)) \frac{\partial u}{\partial x_j} = f(x) . \quad (9)$$

Теорема 7. Пусть $1 \leq p < q < \infty, r > q'$, и,

$$\alpha = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right) \frac{1}{p-1} - \frac{1}{q'} > 1, \quad u(x) - \text{ решение уравнения (9) из}$$

пространства $W_p^1(\omega dx, D)$ и выполняются условия теоремы 5 на нелинейности . Тогда имеет место оценка

$$\sup_D |u(x)| \leq C \left(V(D)^{\alpha-1} \left\| \frac{f}{V} \right\|_{L_{V(D)}^r}^{\frac{1}{p-1}} \right) .$$

Следующая теорема аналог теоремы Карлесона в случае нелинейного вырождающегося уравнения.

Теорема 8. Пусть $0 < \alpha \leq 1, u(x) \in C^\alpha(D) \cap C^1(D/E)$ - решение уравнения (8) вне некоторого компакта $E \subset D$. Тогда для того, чтобы множество E было устранимым, достаточно, чтобы $\Lambda_\mu^h(E) = 0$, где $h(r) = r^{-p+(p-1)\alpha}$, $d\mu = \omega dx$.

Следующие результаты относятся к исследованию качественных свойств решений полулинейных уравнений, с главной частью вырождающегося p Лапласиана.

Теорема 9. Пусть $q > p-2, p \geq 1, R_0 > 0, x_0 \in R^n$, $\omega(x)$ - функция удовлетворяющая условию удвоения и такая, что

$$\frac{1}{R^n} \int_{Q_R^{x_0}} \omega(x) dx \leq C_1, \quad R \leq R_0, \quad (10)$$

где $C_1 > 0$ не зависит от R . Пусть далее в шаре $Q_{R_0}^{x_0}$ определено решение $u \in W_p^1(\omega dx) \cap L^\infty(Q_{R_0}^{x_0})$ неравенства (3). Тогда

$$|u(x_0)| < \alpha R_0^{-\frac{p}{q-p+2}}, \text{ где } \alpha \text{ зависит только от } p, q, n, \gamma, C_1.$$

Теорема 10. Пусть $u(x)$ – решение неравенства (3) во внешности компакта Ω , и выполнены условие $q > p - 2, p \geq 1$, то

$$|u(x)| < \frac{C}{(\rho(x, \Omega))^{\frac{p}{q-p+2}}}, \quad \text{где константа } C > 0 \text{ – зависит от}$$

$$n, p, q, a_0, \gamma, C_1.$$

Теорема 11. Пусть Ω – ограниченная область, содержащая начало координат O . Пусть $u(x)$ – решение неравенства (3) в

$$G = \Omega \setminus \{0\}. \text{ Тогда } |u(x)| < \frac{C}{|x|^{\frac{p}{q-p+2}}} \text{ где } C > 0 \text{ – константа, зависящая}$$

$$n, p, q, a_0, \gamma, C_1.$$

Теорема 12. Пусть $\Omega \subset R^n$ – компакт и выполнены условия $-1 < q < p - 2, p \geq 1$.

Пусть далее $u(x) \in W_{p,loc}^1(\omega dx, R^n \setminus \Omega) \cap L^{\infty,loc}(R_n \setminus \Omega)$ – решение неравенства (3), такое, что $u(x) = o\left(|x|^{-\frac{p}{p-2-q}}\right)$. Тогда $u \equiv 0$ вне шара достаточно большого радиуса Q_R^0 .

Теорема 13. Пусть $R > 0, x_0 \in R^n$, и выполнено условие $-1 < q < p - 2, p \geq 1$. Пусть далее в шаре $Q_R^{x_0}$ определено решение $u(x) \in W_p^1(\omega dx, Q_R^{x_0}) \cap L^\infty(R_n \setminus \Omega)$ неравенства (3). Тогда если

$$\|u\|_{S_R^0} \leq k, \quad \text{где} \quad k = \beta R^{\frac{p}{p-2-q}}, \quad (\beta > 0 - \text{некоторая малая}$$

константа, зависящая от n, p, q, a_0, C_1), то $u(0) = 0$

Теорема 14. Пусть μ – мера, удовлетворяющая условию $\mu(Q) \leq C(\text{diam} Q)^{n-p+(p-1)\alpha}$ для любого шара Q , где $C > 0$ не зависит от Q . Тогда нелинейный потенциал этой меры вида (6) непрерывно по Гельдеру порядка α , $0 < \alpha < 1$.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук Ф.И. Мамедову за внимание к работе, ценные советы и обсуждение полученных результатов.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Guliyev A.D., Mamedov F.I. On the non-linear weight analogue of the Landis-Gerver's type mean value theorem and its applications to quasilinear equations // Proc. of IMM of NAS of Azerbaijan, ser. mech. mat., v. XII (XX), 2000, p. 74-81.
2. Мамедов Ф.И., Кулиев А.Д. Об условии устранимости в классах Гельдера для нелинейного Р-уравнения Лапласа. Материалы научной конференции на тему «Современные проблем математики», посвященной памяти проф. А.А.Новрузова, Баку 2001, с. 25-27.
3. Guliyev A.D. On elimination in Holder classes for non-linear potentials. Proc. of IMM of NAS of Azerb. v. XVII (XXV) 2002. p. 56-61.
4. Guliyev A.D., Mamedov F.I. On some qualitative properties of solutions of degenerated quasilinear equations. Trans. of NAS of Azerb., ser. of physical-technical and mathematical sciens. v. XXII, № 4, 2002, p.91-105.
5. Guliyev A.D. On some properties of second order degenerate quasilinear equations. Trans. of NAS of Azerb., ser. of physical-technical and mathematical sciens. v. XXIII, № 4, 2003, p.35-42.

6. Guliyev A.D., Mamedov F.I. On examples of nonequivalence of weight estimates for Riesz potentials and embedding theorems. Proc. of IMM of NAS of Azerbaijan, v. XX (XXVIII), 2004, p. 15-20.
7. Мамедов Ф.И., Кулиев А.Д. О локальных и глобальных свойствах одного нелинейного вырождающегося уравнения. Тезисы X Международной конференции по математике и механике, посвященной 45-летию Института Математики и Механики. Баку 2004, с.102-103.
8. Мамедов Ф.И., Кулиев А.Д. О двухвесовых оценках для вырождающихся квазилинейных уравнений эллиптического типа. Тезисы Международной конференции по математике и механике, посвященной 50-летию со дня рождения чл.-корр. НАН Азербайджана, проф. И.Т.Мамедова. Баку 2005, с.121.
9. Мамедов Ф.И., Кулиев А.Д. О сингулярной особенности решения вырождающихся квазилинейных эллиптических уравнений. Тезисы XII Международной конференции по математике и механике, посвященной 70 летнему юбилею чл.-корр. НАН Азербайджана, проф. Б.И.Искендерова. Баку 2006, с. 115.
10. Мамедов Ф.И., Кулиев А.Д. Устранимые множества для квазилинейных уравнений. Тезисы Международной конференции по математике и механике, посвященной 80 летнему юбилею академика Ф.Г.Максудова. Баку 2010, с. 217.
11. Mamedov F.I., Guliyev A.D., Mirheyderli M.M.. On Carlson's type removability test for the degenerate quasilinear elliptic equations. Intern. Journal of Differential Equations. v. 2011(2011), article ID 198606, 23p.doi:10.1155/2011/198606.

ASLAN DİLƏN oğlu QULİYEV

**İKİ TƏRTİBLİ CİRLƏŞƏN QEYRİ-XƏTTİ
TƏNLİKLƏRİN HƏLLƏRİNİN KEYFİYYƏT
XƏSSƏLƏRİNİN TƏDQİQİ**

XÜLASƏ

Dissertasiya isı, xüsusi törəmli xətti və kvazixətti elliptik tənliklərin keyfiyyət xassələrinin tədqiqinə həsr edilmişdir. Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakılardır:

- Landis- Gervertin məlum orta qiymət teoreminin yeni çəkili və qeyri-xətti analoqu əldə edilmişdir;
- həllin qradientinə və koordinat dəyişəsinə görə cırlaşması olan tənliklərin müsbət həlləri üçün yeni artma lemması isbat edilmişdir;
- cırlaşan kvazixətti elliptik tənliklər üçün izlə edilmiş məxsusi nöqtə ətrafında və sonsuzluqda həllün keyfiyyət xassələrini ifadə edən teoremlər isbat edilmişdir;
- kvazixətti elliptik tənliklərin üçün aradan qaldırıla bilən məxsusi çoxluqlar haqqında teorem isbat edilmişdir;
- kvazixətti cırlaşan elliptik tənliklər üçün Aleksandrovun maksimum prinsipi tipli həll normasını sağ tərəfin Lebeq norması ilə qiymətləndirən nəticə isbat edilmişdir;
- cırlaşan Sobolev fəzalarında Dirixle məsələsinin ümumiləşmiş həllinin varlığını isbat edən nəticələr alınmışdır;
- Adams-Mazyra tipli qeyri-xətti potensialın Hölder sinfindən olmasına dair nəticə isbat edilmişdir;
- Riss potensialı üçün çəkili qiymətləndirmələr ilə daxilolma teoremləri arasındakı əlaqələri ifadə edən yeni nəticə isbat edilmişdir;
- baş hissədə cırlaşa bilən p -Laplasion olan kvazixətti bərabərsizliklərin local və global xassələrini əks etdirən nəticələr isbat edilmişdir.

ASLAN DILAN oglu QULIYEV

**INVESTIGATION OF QUALITY PROPERTIES OF
SOLUTIONS OF DEGENERATING NONLINEAR
EQUATIONS OF SECOND ORDER**

SUMMARY

The dissertation work is devoted to investigation of quality properties of the solution of linear and quasilinear partial equations of elliptic type. The following main results are obtained:

- a new nonlinear weight analogy of Landis-Gerver theorem on the mean value is proved;
- a lemma in increase of positive solutions in narrow domains is proved for a class of quasilinear elliptic equations with double degeneration – in gradient of the solution and in coordinate variable;
- quality properties of the solutions of degenerate quasilinear equations in unbounded domains and in the vicinity of a singular point are studied;
- issues on exceptional sets for a class of quasilinear elliptic equations are studied;
- local and global properties of the solution of elliptic inequalities whose principal part has the form of degenerate p -Laplacian, are studied;
- a priori estimation of the type of Alexandrov's maximum principle estimating the maximum of the solution by the Lebesgue weight norm of the right side for a class of degenerate quasilinear equations is obtained;
- the existence of the generalized solution of the Dirichlet problem in the Sobolev weight spaces $W_{p,\omega}^1(D)$ is studied for a class of degenerate quasilinear equations;
- the issue of smoothness in Holder spaces C^α for Adams-Mazier nonlinear potential are studied;
- the problems of equivalence of weight estimation for Riesz potentials to imbedding theorems are studied.

