

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

На правах рукописи

АХМЕД ЛОТФИ ИБРАГИМ ИБРАГИМ ЭЛЬБАБЛИ

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВОПРОСОВ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО
КЛАССА ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА**

1211.01 - Дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

БАКУ – 2013

Работа выполнена на кафедре «**Прикладная математика**»
Бакинского Государственного Университета.

Научный руководитель: доктор наук по математике
А.Р.Алиев

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
А.Я.Ахундов
(Институт Математики и Механики
НАН Азербайджана)

кандидат физико-математических
наук, доцент **Я.А.Шарифов**
(Бакинский Государственный
Университет)

Ведущая организация: **Азербайджанский Технический
Университет**
(кафедра «Математика»)

Защита диссертации состоится «03» декабря 2013 г. в 14⁰⁰
часов на заседании Диссертационного Совета FD.02.016 по
присуждению ученой степени доктора философии при Бакинском
Государственном Университете.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Бакинского
Государственного Университета.

Адрес: AZ 1148, г.Баку, ул.З.Халилова, 23.

Автореферат разослан «25» октября 2013 года.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета FD.02.016
доктор наук по математике, профессор

Н.К.Ахмедов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Интерес к исследованиям начальных и краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений сохраняется, начиная с зарождения теории операторно-дифференциальных уравнений. Связано это с тем, что такие уравнения позволяют с единой точки подойти к рассмотрению как обыкновенных дифференциальных операторов, так и операторов с частными производными. Имеется большое число работ, посвященных изучению различных аспектов теории операторно-дифференциальных уравнений. Здесь ограничимся указанием книг С.Г.Крейна, В.И.Горбачук и М.Л.Горбачука, С.Я.Якубова, С.Я.Якубова и Я.С.Якубова. В связи с изучением задач, возникающих в приложениях, в последнее время значительно вырос интерес к изучению дифференциальных уравнений в банаховых и, в частности, в гильбертовых пространствах, особенно, в пространствах Соболева. Отметим также, что эти исследования являются естественным развитием теории операторно-дифференциальных уравнений и тесно связаны с теорией полугрупп, берущих свое начало с работ Т.Като, Э.Хилле, Р.Филлипса, С.Г.Крейна, С.Агмона и Л.Ниренберга, а также нашедших отражение в монографии К.-Й.Энгеля и Р.Нагеля.

Изучение операторно-дифференциальных уравнений часто приводит к исследованию полиномиальных операторных пучков. Эти пучки являются символами указанных уравнений. Отметим, что теория операторных пучков берет свое начало с фундаментальной работы М.В.Келдыша и развита в последствии в работах Дж.Э.Аллахвердиева, М.Г.Гасымова, И.Ц.Гохберга, А.Г.Костюченко, М.Г.Крейна, С.Г.Крейна, Г.К.Лангера, В.Б.Лидского, А.С.Маркуса, В.И.Мацаева, С.С.Мирзоева, Г.В.Радзиевского, А.А.Шкаликова, С.Я.Якубова и ряда других. Естественно, что при изучении операторно-дифференциальных уравнений возникают вопросы о полноте, минимальности и базисности их элементарных решений, которые тесно связаны с исследованиями о полноте, минимальности и базисности системы собственных и присоединенных векторов соответствующих операторных пучков.

В настоящей диссертационной работе проводится систематическое исследование одного класса операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка с кратной характеристикой. При этом основное внимание уделяется вопросам корректной и однозначной разрешимости в пространствах типа Соболева операторно-дифференци-

альных уравнений и спектральным задачам полиномиальных операторных пучков, являющихся символами этих уравнений. Значительное внимание в спектральных задачах отводится исследованию полноты части собственных и присоединенных векторов. Несмотря на значительное число журнальных публикаций, посвященных изучению различных аспектов теории операторно-дифференциальных уравнений, работ, в которых систематически изучаются операторно-дифференциальные уравнения нечетного порядка, в том числе третьего порядка, с кратной характеристикой, почти нету. Рассматриваемый в диссертационной работе класс операторно-дифференциальных уравнений охватывает уравнения с действительными и действительными кратными характеристиками. Отметим, что дифференциальные уравнения, характеристические уравнения которых имеют действительные различные или действительные кратные корни, находят широкое применение при моделировании задач механики и техники, в частности, в задачах магнито-гидродинамики, в задачах фильтрации, в задачах динамики арок и колец, в задачах аэродинамики и т.д.

Цель работы.

1. Изучение корректной и однозначной разрешимости в пространствах типа Соболева и в весовых их аналогах операторно-дифференциального уравнения третьего порядка с кратной характеристикой, рассматриваемого на всей оси и на полуоси.

2. Нахождение оценок норм операторов промежуточных производных в пространствах типа Соболева и в весовых их аналогах относительно нормы, порожденной главной частью исследуемого уравнения.

3. Исследование некоторых спектральных задач для одного полиномиального операторного пучка третьего порядка с кратной характеристикой.

Научная новизна. В диссертации установлены следующие основные результаты:

- найдены условия корректной и однозначной разрешимости в пространствах типа Соболева и в весовых их аналогах для операторно-дифференциального уравнения третьего порядка с кратной характеристикой, рассматриваемого на всей оси и на полуоси;
- получены точные значения норм операторов промежуточных производных в пространствах типа Соболева, а также проведены оценки сверху этих норм в весовых пространствах типа Соболева отно-

сительно нормы, порожденной главной частью исследуемого уравнения;

- установлена связь значений норм операторов промежуточных производных с условиями корректной и однозначной разрешимости;
- доказана полнота производной цепочки, построенной по собственным и присоединенным векторам полиномиального операторного пучка третьего порядка с кратной характеристикой и отвечающей краевой задачи на полуоси, при этом исследованы аналитические свойства резольвенты данного пучка;
- найдены условия полноты элементарных решений однородного операторно-дифференциального уравнения третьего порядка с кратной характеристикой, рассматриваемого на полуоси.

Общая методика исследований. В работе применяются методы теории операторно-дифференциальных уравнений и теории полугрупп, спектральной теории операторов и операторных пучков. Помимо их используются методы преобразования Фурье в абстрактных пространствах, а также методы теории обобщенных функций и теории целых функций.

Теоретическая и практическая ценность. Установленные в диссертации результаты носят, в основном, теоретический характер. Они могут быть применены в дальнейших исследованиях по теории операторно-дифференциальных уравнений, спектральной теории операторных пучков, в некоторых задачах для дифференциальных уравнений в частных производных, а также при моделировании ряда задач механики и техники, в частности, в задачах теплообмена и фильтрации, в задачах динамики арок и колец.

Апробация работы. Основные результаты диссертации обсуждены на семинарах кафедр «Прикладная математика», «Теория функций и функциональный анализ» и «Уравнения математической физики» Бакинского Государственного Университета, на семинарах отделов «Функциональный анализ», «Дифференциальные уравнения» и «Негармонический анализ» Института Математики и Механики НАН Азербайджана. Результаты диссертации также докладывались на Международной конференции по функциональному анализу и его приложениям, посвященная 100-летию академика З.И.Халилова (Баку, Институт Математики и Механики НАН Азербайджана, 12-14 января 2011 г.), на четвертом конгрессе математического общества тюркского мира (Баку, Азербайджан, 1-3 июля 2011 г.), на 6-ой Международной турецко-украинской конференции «Математический анализ, диффе-

ренциальные уравнения и их приложения» (Мерсин, Турция, 4-9 сентября 2012 г.), на Международной научной конференции «Функциональный анализ и его приложения», посвященной 70-летию академика НАН РК М.Отелбаева (Астана, Казахстан, 2-5 октября 2012 г.), на Международной конференции «Актуальные проблемы математики и информатики», посвященной 90-летию со дня рождения Гейдара Алиева (Баку, Азербайджан, 29-31 мая 2013 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 11 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Объем и структура работы. Диссертация изложена 120 страниц, состоит из введения, трех глав, включающих 9 параграфов, и списка литературы, содержащего 78 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе в пространствах типа Соболева изучаются вопросы корректной и однозначной разрешимости одного класса операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка с кратной характеристикой, рассматриваемые как на всей оси, так на полуоси.

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y) , $x, y \in H$, A - положительно-определенный самосопряженный оператор в H , а H_γ ($\gamma \geq 0$) - шкала гильбертовых пространств, порожденная оператором A , т.е.

$$H_\gamma = D(A^\gamma), \quad (x, y)_\gamma = (A^\gamma x, A^\gamma y), \quad x, y \in D(A^\gamma).$$

Для функций $u(t)$, определенных в $R = (-\infty, +\infty)$, со значениями в H введем следующие гильбертовы пространства:

$$L_2(R; H) = \left\{ u(t) : \|u\|_{L_2(R; H)}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \|u(t)\|_H^2 dt < +\infty \right\},$$

$$W_2^3(R; H) = \left\{ u(t) : \|u\|_{W_2^3(R; H)}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left\| \frac{d^3 u(t)}{dt^3} \right\|_H^2 + \|A^3 u(t)\|_H^2 \right) dt < +\infty \right\}.$$

Здесь и в дальнейшем, производные понимаются в смысле теории распределений. Аналогично, для функций $u(t)$, определенных в $R_+ = [0, +\infty)$, со значениями в H введем следующие гильбертовы пространства:

$$L_2(R_+; H) = \left\{ u(t) : \|u\|_{L_2(R_+; H)}^2 = \int_0^{+\infty} \|u(t)\|_H^2 dt < +\infty \right\},$$

$$W_2^3(R_+; H) = \left\{ u(t) : \|u\|_{W_2^3(R_+; H)}^2 = \int_0^{+\infty} \left(\left\| \frac{d^3 u(t)}{dt^3} \right\|_H^2 + \|A^3 u(t)\|_H^2 \right) dt < +\infty \right\}.$$

Прежде исследуется в H следующее операторно-дифференциальное уравнение на всей оси:

$$\left(-\frac{d}{dt} + A \right) \left(\frac{d}{dt} + A \right)^2 u(t) + A_1 \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + A_2 \frac{du(t)}{dt} = f(t), \quad t \in R, \quad (1)$$

где A - положительно-определенный самосопряженный оператор, A_1 , A_2 - линейные, вообще говоря, неограниченные операторы, $f(t) \in L_2(R; H)$, $u(t) \in W_2^3(R; H)$.

Определение 1. Если при $f(t) \in L_2(R; H)$ существует вектор-функция $u(t) \in W_2^3(R; H)$, удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду, то ее будем называть *регулярным решением* уравнения (1).

Определение 2. Если при любом $f(t) \in L_2(R; H)$ существует регулярное решение $u(t)$ уравнения (1), причем имеет место неравенство

$$\|u\|_{W_2^3(R; H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2(R; H)},$$

то уравнение (1) будем называть *регулярно разрешимым*.

Отметим, что на оси вопрос разрешимости уравнения (1) не вызывает слишком сильных осложнений и можно решать путем преобразования Фурье.

Теорема 1. Пусть A - положительно-определенный самосопряженный оператор, операторы $A_j A^{-j}$, $j=1,2$ ограничены в H и выполняется неравенство

$$\|A_1 A^{-1}\|_{H \rightarrow H} + \|A_2 A^{-2}\|_{H \rightarrow H} < \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда уравнение (1) регулярно разрешимо.

Более тонкой задачей является вопрос разрешимости операторно-дифференциального уравнения (1) на полуоси. Одна из причин заключается в том, что к уравнению необходимо присоединить условия в нуле так, чтобы полученная таким образом краевая задача оказалась бы корректной.

В пространстве H рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\left(-\frac{d}{dt} + A\right)\left(\frac{d}{dt} + A\right)^2 u(t) + A_1 \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + A_2 \frac{du(t)}{dt} = f(t), \quad t \in R_+, \quad (2)$$

$$\frac{d^i u(0)}{dt^i} = 0, \quad i = 0, 1. \quad (3)$$

где A - положительно-определенный самосопряженный оператор, а A_1, A_2 - линейные, вообще говоря, неограниченные операторы, $f(t) \in L_2(R_+; H)$, $u(t) \in W_2^3(R_+; H)$.

Определение 3. Если функция $u(t) \in W_2^3(R_+; H)$ удовлетворяет уравнению (2) почти всюду в R_+ , то ее будем называть *регулярным решением* уравнения (2).

Определение 4. Если при любом $f(t) \in L_2(R_+; H)$ существует регулярное решение уравнения (2), для которого краевые условия (3) выполняются в смысле

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| A^{\frac{5}{2}-i} \frac{d^i u(t)}{dt^i} \right\|_H = 0, \quad i = 0, 1,$$

и имеет место неравенство

$$\|u\|_{W_2^3(R_+; H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2(R_+; H)},$$

тогда будем говорить, что задача (2), (3) *регулярно разрешима*.

Для краевой задачи (2), (3) получены условия регулярной разрешимости. При этом указана связь этих условий с нахождением точных значений норм операторов промежуточных производных в пространстве

$$W_2^3(R_+; H; 0, 1) = \left\{ u(t) : u(t) \in W_2^3(R_+; H), u(0) = \frac{du(0)}{dt} = 0 \right\}$$

относительно нормы оператора, порожденного главной частью уравнения (2). На такую связь в своих работах впервые детально обратил внимание С.С.Мирзоев. Для оценки этих норм им был использован метод факторизации естественно возникающих при исследовании полиномиальных операторных пучков, которые зависят от действительного параметра. В дальнейшем, эти результаты были развиты в работах А.Р.Алиева.

Обозначим через P_0 оператор, действующий из пространства $\overset{o}{W}_2^3(R_+; H; 0, 1)$ в пространство $L_2(R_+; H)$ следующим образом:

$$P_0 u(t) \equiv \left(-\frac{d}{dt} + A \right) \left(\frac{d}{dt} + A \right)^2 u(t), \quad u(t) \in \overset{o}{W}_2^3(R_+; H; 0, 1).$$

Имеет место

Теорема 2. Оператор P_0 осуществляет изоморфизм из пространства $\overset{o}{W}_2^3(R_+; H; 0, 1)$ на пространство $L_2(R_+; H)$.

Теорема 2 показывает, что норма $\|P_0 u\|_{L_2(R_+; H)}$ эквивалентна в пространстве $\overset{o}{W}_2^3(R_+; H; 0, 1)$ исходной норме $\|u\|_{\overset{o}{W}_2^3(R_+; H)}$. Поэтому по теореме о промежуточных производных конечны числа

$$n_j = \sup_{\substack{0 \neq u \in \overset{o}{W}_2^3(R_+; H; 0, 1)}} \frac{\left\| A^{3-j} \frac{d^j u}{dt^j} \right\|_{L_2(R_+; H)}}{\|P_0 u\|_{L_2(R_+; H)}}, \quad j = 1, 2.$$

Исходя из методики работы С.С.Мирзоева, подвергнем факторизации естественно возникающие при изучении операторные пучки

$$P_j(\lambda; \beta; A) = \left((i\lambda)^2 E + A^2 \right)^3 - \beta (i\lambda)^{2j} A^{6-2j}, \quad j = 1, 2, \quad (4)$$

зависящие от действительного параметра β , где E - единичный оператор.

Теорема 3. Пусть $\beta \in \left[0, \frac{27}{4} \right)$. Тогда полиномиальные операторные пучки (4) обратимы на мнимой оси и они допускают следующие представления:

$$P_j(\lambda; \beta; A) = F_j(\lambda; \beta; A) F_j(-\lambda; \beta; A), \quad j = 1, 2,$$

причем

$$F_j(\lambda; \beta; A) = \prod_{s=1}^3 \left(\lambda E - \omega_{j,s}(\beta) A \right) \equiv \lambda^3 E + \alpha_{1,j}(\beta) \lambda^2 A + \alpha_{2,j}(\beta) \lambda A^2 + A^3,$$

где $\operatorname{Re} \omega_{j,s}(\beta) < 0$, $s = 1, 2, 3$, а числа $\alpha_{1,j}(\beta)$, $\alpha_{2,j}(\beta)$ положительны и удовлетворяют следующим системам уравнений:

$$1) \text{ при } j = 1 \qquad \qquad \qquad 2) \text{ при } j = 2$$

$$\begin{cases} -2\alpha_{2,1}(\beta) + \alpha_{1,1}^2(\beta) - 3 = 0, \\ 2\alpha_{1,1}(\beta) - \alpha_{2,1}^2(\beta) + 3 = \beta; \end{cases} \quad \begin{cases} -2\alpha_{2,2}(\beta) + \alpha_{1,2}^2(\beta) - 3 = -\beta, \\ 2\alpha_{1,2}(\beta) - \alpha_{2,2}^2(\beta) + 3 = 0. \end{cases}$$

Далее, проводя схожие как в работах С.С.Мирзоева рассуждения, но, учитывая собственную специфику краевой задачи (2), (3), получим следующее утверждение.

Теорема 4. *Имеем*

$$n_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Установленные результаты позволяют сформулировать достаточные условия регулярной разрешимости краевой задачи (2), (3).

Теорема 5. *Пусть A - положительно-определенный самосопряженный оператор, операторы $A_j A^{-j}$, $j=1,2$ ограничены в H и выполняется неравенство*

$$\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)^{\frac{1}{2}}} \|A_1 A^{-1}\|_{H \rightarrow H} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \|A_2 A^{-2}\|_{H \rightarrow H} < 1.$$

Тогда краевая задача (2), (3) регулярно разрешима.

В конце первой главы результаты о разрешимости задачи (2), (3) иллюстрируются на примере начально-краевых задач для уравнений в частных производных.

Отметим, что полученные условия регулярной разрешимости как для уравнения (1), так и для краевой задачи (2), (3) не улучшаемы в терминах их операторных коэффициентов.

Во второй главе доказывается полнота производной цепочки, построенной по собственным и присоединенным векторам полиномиального операторного пучка третьего порядка с кратной характеристикой и отвечающей краевой задачи на полуоси. При этом изучаются аналитические свойства резольвенты исследуемого пучка. Более того, доказывается теорема о полноте элементарных решений однородного операторно-дифференциального уравнения на полуоси, соответствующего рассматриваемому пучку.

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H полиномиальный операторный пучок

$$P(\lambda) = (-\lambda E + A)(\lambda E + A)^2 + \lambda^2 A_1 + \lambda A_2, \quad (5)$$

где E - единичный оператор, A - положительно-определенный самосопряженный оператор с вполне непрерывным обратным A^{-1} , а A_1 ,

A_2 - линейные операторы, причем $A_j A^{-j}$, $j=1,2$ ограничены в H . В этом случае пучок $P(\lambda)$ имеет дискретный спектр.

С пучком (5) свяжем краевую задачу вида

$$P(d/dt)u(t) = 0, \quad t \in R_+, \quad (6)$$

$$u(0) = \varphi_0, \quad \frac{du(0)}{dt} = \varphi_1, \quad (7)$$

где $u(t) \in W_2^3(R_+; H)$, $\varphi_s \in H_{5/2-s}$, $s=0,1$.

Пусть λ_n ($n=1,2,\dots$) - собственные значения пучка $P(\lambda)$ из левой полуплоскости Π_- , а $\psi_{0,n}, \psi_{1,n}, \dots, \psi_{m,n}$ - собственные и присоединенные векторы, отвечающие собственному значению λ_n :

$$P(\lambda_n)\psi_{0,n} = 0, \quad P(\lambda_n)\psi_{1,n} + P'(\lambda_n)\psi_{0,n} = 0,$$

$$P(\lambda_n)\psi_{2,n} + P'(\lambda_n)\psi_{1,n} + \frac{P''(\lambda_n)}{2}\psi_{0,n} = 0,$$

$$P(\lambda_n)\psi_{q,n} + P'(\lambda_n)\psi_{q-1,n} + \frac{P''(\lambda_n)}{2}\psi_{q-2,n} - \psi_{q-3,n} = 0, \quad q=3,\dots,m.$$

Тогда вектор-функции

$$u_{h,n}(t) = e^{\lambda_n t} \left(\psi_{h,n} + \frac{t}{1!} \psi_{h-1,n} + \dots + \frac{t^h}{h!} \psi_{0,n} \right), \quad h=0,1,\dots,m,$$

принадлежат $W_2^3(R_+; H)$ и удовлетворяют уравнению $P(d/dt)u(t) = 0$.

Эти решения называются элементарными решениями уравнения $P(d/dt)u(t) = 0$. С помощью этих решений определим вектор

$$\tilde{\psi}_{h,n} = \{\psi_{h,n}^{(0)}, \psi_{h,n}^{(1)}\} \in \tilde{H} \equiv H_{5/2} \oplus H_{3/2},$$

где $\psi_{h,n}^{(s)} \equiv \frac{d^s}{dt^s} u_{h,n}(t) \Big|_{t=0}$, $s=0,1$, $h=0,1,\dots,m$. Систему $\{\tilde{\psi}_{h,n}\}_{n=1}^\infty$ будем

называть производной цепочкой собственных и присоединенных векторов пучка $P(\lambda)$, порожденной краевой задачей вида (6), (7).

Как известно, первыми фундаментальными результатами в спектральной теории абстрактных несамосопряженных операторов являются результаты М.В.Келдыша об n -кратной полноте собственных и присоединенных векторов. Интереснейшее развитие получили эти результаты в расширении класса операторных коэффициентов пучка операторов М.В.Келдыша и в распространении на банаховы простран-

ства в работах многих математиков, результаты которых нашли отражение в обзорной статье Г.В.Радзиевского. Среди них особо следует подчеркнуть результаты М.Г.Гасымова о полноте части собственных и присоединенных векторов, отвечающих краевым задачам на полуоси. М.Г.Гасымовым был предложен оригинальный метод исследования. Этот метод связан с получением различных признаков разрешимости краевых задач, откуда и делается заключение о полноте части собственных и присоединенных векторов. В дальнейшем эти результаты были развиты в работах С.С.Мирзоева. В этом аспекте отметим и работы А.А.Шкаликова, в которых более того получены важные результаты о минимальности и базисности производных цепочек, отвечающих краевым задачам на полуоси.

В этой главе прежде, чем в терминах операторных коэффициентов пучка (5) установить полноту системы $\{\tilde{\psi}_{h,n}\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $\tilde{H}$, исходя из идеи М.Г.Гасымова, необходимо изучить разрешимость краевой задачи (6), (7) и некоторые аналитические свойства пучка (5).

Определение 5. Краевая задача (6), (7) называется *регулярно разрешимой*, если при любых $\varphi_s \in H_{5/2-s}$, $s = 0, 1$, существует вектор-функция $u(t) \in W_2^3(R_+; H)$, которая удовлетворяет уравнению (6) почти всюду в R_+ , краевые условия выполняются в смысле

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u(t) - \varphi_0\|_{H_{5/2}} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{du(t)}{dt} - \varphi_1 \right\|_{H_{3/2}} = 0$$

и имеет место неравенство

$$\|u\|_{W_2^3(R_+, H)} \leq \text{const} (\|\varphi_0\|_{H_{5/2}} + \|\varphi_1\|_{H_{3/2}}).$$

При этом $u(t)$ будем называть *регулярным решением* краевой задачи (6), (7).

Справедлива

Теорема 6. Пусть A - положительно-определенный самосопряженный оператор, операторы $A_j A^{-j}$, $j = 1, 2$ ограничены в H и выполняется неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)^{1/2}} \|A_1 A^{-1}\|_{H \rightarrow H} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \|A_2 A^{-2}\|_{H \rightarrow H} < 1.$$

Тогда краевая задача (6), (7) *регулярно разрешима*.

Теперь приведем оценки резольвенты пучка $P(\lambda)$ на мнимой оси и на примыкающих к ней некоторых лучах.

Теорема 7. Пусть A - положительно-определенный самосопряженный оператор, операторы $A_j A^{-j}$, $j=1,2$ ограничены в H , причем выполняется неравенство

$$\|A_1 A^{-1}\| + \|A_2 A^{-2}\| < \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда на мнимой оси резольвента пучка $P(\lambda)$ существует и имеют место оценки

$$\sum_{j=0}^2 \|\lambda^{3-j} A^j P^{-1}(\lambda)\| \leq \text{const}. \quad (8)$$

$$\|A^\alpha P^{-1}(\lambda)\| \leq \text{const} |\lambda|^{\alpha-3}, \quad 0 < \alpha < 3, \lambda \neq 0. \quad (9)$$

Теорема 8. Пусть выполняются условия теоремы 7. Тогда при достаточно малом $\nu > 0$ на лучах

$$\Gamma_{\frac{\pi}{2} \pm \nu} = \left\{ \lambda : \lambda = r e^{i\left(\frac{\pi}{2} \pm \nu\right)}, r > 0 \right\}, \quad \Gamma_{-\frac{\pi}{2} \pm \nu} = \left\{ \lambda : \lambda = r e^{-i\left(\frac{\pi}{2} \pm \nu\right)}, r > 0 \right\}$$

операторный пучок $P(\lambda)$ обратим и имеют место оценки (8), (9).

Отметим, что при получении результатов теорем 6, 7 и 8 не требуется условие вполне непрерывности оператора A^{-1} .

Через $\sigma_\infty(H)$ обозначим множество вполне непрерывных операторов, действующих в H .

Как известно, если $C \in \sigma_\infty(H)$, то $(C^*C)^{1/2}$ - вполне непрерывный самосопряженный оператор в H . Собственные значения оператора $(C^*C)^{1/2}$ будем называть s -числами оператора C . Ненулевые s -числа оператора C будем нумеровать в порядке убывания с учетом их кратности. Обозначим через

$$\sigma_p = \left\{ C : C \in \sigma_\infty(H); \sum_{k=1}^{\infty} s_k^p(C) < \infty \right\}, \quad 0 < p < \infty.$$

Имеет место следующая

Теорема 9. Пусть выполняются условия теоремы 6 и имеет место одно из следующих условий:

$$1) A^{-1} \in \sigma_p, \quad 0 < p \leq 1;$$

2) $A^{-1} \in \sigma_p$, $0 < p < \infty$, $A_j A^{-j} \in \sigma_\infty(H)$, $j=1,2$.

Тогда система $\{\tilde{w}_{h,n}\}_{n=1}^\infty$ полна в пространстве $\tilde{H}$.

В теореме 6 найдены достаточные условия, при которых краевая задача (6), (7) имеет единственное решение из пространства $W_2^3(R_+; H)$ при любых $\varphi_s \in H_{\frac{s}{2-s}}$, $s=0,1$. Множество всех таких решений обозначим через $W(P)$. По теоремам о промежуточных производных и о следах множество $W(P)$ является замкнутым подпространством пространства $W_2^3(R_+; H)$. Вторая глава подытоживается доказательством в пространстве $W(P)$ полноты системы элементарных решений уравнения (6).

Теорема 10. Пусть выполняются условия теоремы 6. Если имеет место одно из следующих условий:

1) $A^{-1} \in \sigma_p$, $0 < p \leq 1$;

2) $A^{-1} \in \sigma_p$, $0 < p < \infty$, $A_j A^{-j} \in \sigma_\infty(H)$, $j=1,2$,

то система элементарных решений краевой задачи (6), (7) полна в пространстве $W(P)$.

В третьей главе в пространствах типа Соболева с экспоненциальным весом найдены условия корректной и однозначной разрешимости для одного класса операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка с кратной характеристикой, рассматриваемые как на всей оси, так и на полуоси. В результатах главы установлена связь между показателем экспоненциального веса и нижней границей спектра основного оператора, участвующего в главной части уравнений.

Прежде исследуется уравнение (1) при условии, что $f(t) \in L_{2,\kappa}(R; H)$, $u(t) \in W_{2,\kappa}^3(R; H)$, где

$$L_{2,\kappa}(R; H) = \left\{ u(t) : \|u\|_{L_{2,\kappa}(R; H)}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \|u(t)\|_H^2 e^{-\kappa t} dt < +\infty \right\},$$

$$W_{2,\kappa}^3(R; H) = \left\{ u(t) : \|u\|_{W_{2,\kappa}^3(R; H)}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left\| \frac{d^3 u(t)}{dt^3} \right\|_H^2 + \|A^3 u(t)\|_H^2 \right) e^{-\kappa t} dt < +\infty \right\}.$$

Очевидно, при $\kappa=0$ будем иметь пространства $L_{2,0}(R; H) = L_2(R; H)$,

$$W_{2,0}^3(R; H) = W_2^3(R; H).$$

Справедлива следующая

Теорема 11. Пусть A - положительно-определенный самосопряженный оператор с нижней границей спектра μ_0 , $\kappa \in (-2\mu_0, 2\mu_0)$ и операторы $A_j A^{-j}$, $j=1,2$ ограничены в H , причем выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^2 c_j(\kappa; \mu_0) b(\kappa; \mu_0) \|A_j A^{-j}\|_{H \rightarrow H} < 1,$$

где

$$b(\kappa; \mu_0) = \frac{\mu_0}{2^{1/2} (2\mu_0^2 - \kappa^2)^{1/2}}, \text{ если } 0 \leq \frac{\kappa^2}{4\mu_0^2} < \frac{1}{3},$$

$$b(\kappa; \mu_0) = \frac{2\mu_0 |\kappa|}{4\mu_0^2 - \kappa^2}, \text{ если } \frac{1}{3} \leq \frac{\kappa^2}{4\mu_0^2} < 1,$$

$$c_1(\kappa; \mu_0) = \left(1 + \frac{4\mu_0 |\mu_0 + \kappa|}{(2\mu_0 + \kappa)^2} \right)^{1/2}, \quad c_2(\kappa; \mu_0) = \max \left\{ \frac{2\mu_0}{2\mu_0 + \kappa}, 1 \right\}.$$

Тогда для любого $f(t) \in L_{2,\kappa}(R; H)$ уравнение (1) имеет единственное решение $u(t)$ из пространства $W_{2,\kappa}^3(R; H)$.

Далее изучается краевая задача (2), (3) при условии $f(t) \in L_{2,\kappa}(R_+; H)$, $u(t) \in W_{2,\kappa}^3(R_+; H)$, где

$$L_{2,\kappa}(R_+; H) = \left\{ u(t) : \|u\|_{L_{2,\kappa}(R_+; H)}^2 = \int_0^{+\infty} \|u(t)\|_H^2 e^{-\kappa t} dt < +\infty \right\},$$

$$W_{2,\kappa}^3(R_+; H) = \left\{ u(t) : \|u\|_{W_{2,\kappa}^3(R_+; H)}^2 = \int_0^{+\infty} \left(\left\| \frac{d^3 u(t)}{dt^3} \right\|_H^2 + \|A^3 u(t)\|_H^2 \right) e^{-\kappa t} dt < +\infty \right\}.$$

В этом случае, при $\kappa = 0$ будем иметь пространства $L_{2,0}(R_+; H) = L_2(R_+; H)$, $W_{2,0}^3(R_+; H) = W_2^3(R_+; H)$. Изучение начинается с рассмотрения оператора $P_0^{(w)}$, действующего из пространства $W_{2,\kappa}^3(R_+; H)$ в пространство $L_{2,\kappa}(R_+; H)$ следующим образом:

$$P_0^{(w)} u(t) \equiv \left(-\frac{d}{dt} + A \right) \left(\frac{d}{dt} + A \right)^2 u(t), \quad u(t) \in W_{2,\kappa}^3(R_+; H),$$

где

$$W_{2,\kappa}^3(R_+;H) = \left\{ u(t) : u(t) \in W_{2,\kappa}^3(R_+;H), \frac{d^i u(0)}{dt^i} = 0, i = 0,1 \right\}.$$

Имеет место следующая

Теорема 12. Пусть A - положительно-определенный самосопряженный оператор с нижней границей спектра μ_0 и $\kappa \in (-2\mu_0, 2\mu_0)$. Тогда оператор $P_0^{(w)}$ осуществляет изоморфизм между пространствами $W_{2,\kappa}^3(R_+;H)$ и $L_{2,\kappa}(R_+;H)$.

При $\kappa \in (-2\mu_0, 2\mu_0)$ из теоремы 12 становится ясно, что норма $\|P_0^{(w)}u\|_{L_{2,\kappa}(R_+;H)}$ эквивалентна исходной норме $\|u\|_{W_{2,\kappa}^3(R_+;H)}$ в пространстве $W_{2,\kappa}^3(R_+;H)$.

Отметим, что при $\kappa = \pm 2\mu_0$ оператор $P_0^{(w)}$ не обратим. Более того, в этом случае оператор $P_0^{(w)}$ не фредгольмов (его образ не замкнут). Доказательство этого факта дано в работах А.А.Шкаликова.

В результате, справедлива следующая теорема о разрешимости в весовом пространстве для краевой задачи (2), (3).

Теорема 13. Пусть A - положительно-определенный самосопряженный оператор с нижней границей спектра μ_0 , $\kappa \in (-2\mu_0, 2\mu_0)$ и операторы $A_j A^{-j}$, $j=1,2$ ограничены в H , причем выполняется неравенство

$$\|A_1 A^{-1}\|_{H \rightarrow H} + \|A_2 A^{-2}\|_{H \rightarrow H} < 2 \left(1 - \frac{\kappa^2}{4\mu_0^2} \right)^{1/2}.$$

Тогда для любого $f(t) \in L_{2,\kappa}(R_+;H)$ краевая задача (2), (3) имеет единственное решение $u(t)$ из пространства $W_{2,\kappa}^3(R_+;H)$.

Третья глава подытоживается рассмотрением примера из первой главы для начально-краевых задач для уравнений в частных производных, учитывая случай веса.

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору наук по математике А.Р.Алиеву за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. Aliev A.R., Elbably A.L. On the solution of boundary value problem for a class of third order operator-differential equations with multiple characteristics / Proceedings of the International conference on functional analysis and its applications devoted to the 100-th anniversary of academician Z.I. Khalilov, Baku, Azerbaijan, January 12-14, 2011, p.61-63.
2. Aliev A.R., Elbably A.L. On a class of operator-differential equations of third order with multiple characteristics on the whole axis in the weighted space / Abstracts of the 4th Congress of the Turkic World Mathematical Society, Ministry of Education of the Republic of Azerbaijan, Baku / Azerbaijan, 1-3 July, 2011, p.67.
3. Эльбабли А.Л. О разрешимости одного класса операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка с кратной характеристикой // Вестник Бакинского Университета, сер. физ.-матем. наук, 2011, №3, с.65-70.
4. Elbably A.L. Properties of the resolvent of a polynomial operator pencil of third order with multiple characteristics // News of Baku University, ser. of phys.-math. sciences, 2012, №1, p.93-99.
5. Алиев А.Р., Эльбабли А.Л. О разрешимости в весовом пространстве операторно-дифференциального уравнения третьего порядка с кратной характеристикой // Доклады РАН, 2012, т.443, №4, с.407-409.
6. Elbably A.L. Completeness of derivative chains for polynomial operator pencil of third order with multiple characteristics / Abstracts of 6-th Turkish-Ukrainian International conference on Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications, September 04-09, 2012, Mersin, Turkey, p.45.
7. Aliev A.R., Elbably A.L. Completeness of system of elementary solutions for operator-differential equations of third order with multiple characteristics / International scientific conference "Functional Analysis and its Applications" dedicated to the 70-th anniversary of Mukhtarbay Otelbaev, Abstracts of Reports, October 2-5, 2012, Astana, Kazakhstan, p.77-78.
8. Elbably A.L. On the completeness of a system of elementary solutions for an operator-differential equation // Transactions of NAS of Azerb., ser. of phys.-tech. and math. sciences, 2012, v.32, №4, p.35-42.

9. Aliev A.R., Elbably A.L. On the factorization of some polynomial operator pencils of the sixth order // Journal of Qafqaz University, series of mathematics and computer science, 2012, №34, p.66-72.
10. Elbably A.L. On the solvability in a weight space of a differential equation with operator coefficient / On Actual Problems of Mathematics and Informatics, Abstracts of International conference dedicated to the 90-th anniversary of Haydar Aliyev, May 29-31, 2013, Baku, Azerbaijan, p.34-35.
11. Aliev A.R., Elbably A.L. Well-posedness of a boundary value problem for a class of third order operator-differential equations // Boundary Value Problems, 2013, v.2013:140, 15 pages.

**INVESTIGATION OF SOLVABILITY PROBLEMS FOR A CLASS
OF THIRD ORDER OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS**

SUMMARY

The thesis is dedicated to the well-posed and unique solvability in the Hilbert spaces of operator-differential equations of the third order with multiple characteristics and the spectral problems of polynomial operator pencil, which is the character of this equation. In this thesis, the following main results are obtained:

- conditions of well-posed and unique solvability are found in the Sobolev-type space and in their weight analogues for operator-differential equation of the third order with multiple characteristics, considered on the whole axis and on the semiaxis;

- the exact values of the norms of intermediate derivatives operators in the Sobolev-type space are obtained and also estimates upper bounds of these norms are carried out in the weight spaces of Sobolev-type with respect to the norms generated by the principal part of the investigated equation;

- connection of the values of norms of intermediate derivatives operators with the conditions of well-posed and unique solvability is established;

- completeness of the derivative chain constructed by eigen and adjoint vectors is proved for polynomial operator pencils of third order with multiple characteristics corresponding to the boundary value problem on the semiaxis, the analytic properties of the resolvent of the given pencil are investigated;

- conditions of completeness of elementary solutions of the homogeneous operator-differential equation of the third order with multiple characteristics, considered on the semiaxis are found.

AHMED LOTFY İBRAHİM İBRAHİM ELBABLY

**BİR SİNİF ÜÇTƏRTİBLİ OPERATOR-DİFERENSİAL
TƏNLİKLƏRİN HƏLL OLUNMA MƏSƏLƏLƏRİNİN TƏDQIQI**

XÜLASƏ

Dissertasiya Hilbert fəzalarda təkrarlanan xarakteristikaya malik üçtərtibli operator-diferensial tənliyin korrekt və birqiymətli həll olunması məsələlərinə və bu tənliyin simvolu olan polinomial operator dəstənin spektral məsələlərinə həsr olunmuşdur. İşdə aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

- bütün oxda və yarımoxda təkrarlanan xarakteristikaya malik üçtərtibli operator-diferensial tənlik üçün Sobolev tipli fəzalarda və onların çəkili analoqlarında korrekt və birqiymətli həll olunma şərtləri tapılmışdır;

- Sobolev tipli fəzalarda aralıq törəmə operatorlarının normaları dəqiq hesablanmışdır. Həmçinin, bu normaların tədqiq olunan tənliyin baş hissəsinin doğurduğu normadan asılı Sobolev tipli çəkili fəzalarda yuxarıdan qiymətləndirilməsi aparılmışdır;

- aralıq törəmə operatorlarının normalarının qiymətlərinin korrekt və birqiymətli həll olunma şərtləri ilə əlaqəsi müəyyən edilmişdir;

- təkrarlanan xarakteristikaya malik üçtərtibli polinomial operator dəstənin məxsusi və qoşulmuş vektorlarına görə qurulmuş və yarımoxda sərhəd məsələsinə cavab verən törəmə zəncirinin tamlığı isbat edilmişdir. Bunun üçün verilmiş dəstənin rezolventasının analitik xassələri öyrənilmişdir;

- yarımoxda baxılan təkrarlanan xarakteristikaya malik üçtərtibli bircins operator-diferensial tənliyin elementar həllərinin tamlıq şərtləri tapılmışdır.

**AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ
BAKİ DÖVLƏT UNİVERSİTETİ**

Əlyazması hüququnda

AHMED LOTFY İBRAHİM İBRAHİM ELBABLY

**BİR SİNİF ÜÇTƏRTİBLİ OPERATOR-DİFERENSİAL
TƏNLİKLƏRİN HƏLL OLUNMA MƏSƏLƏLƏRİNİN TƏDQİQİ**

1211.01 – Diferensial tənliklər

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

BAKİ – 2013