

AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ
BAKİ DÖVLƏT UNIVERSİTETİ

Əlyazma hüququnda

HİKMƏT TAHİR OĞLU TAĞIYEV

QEYRİ-LOKAL SƏRHƏD ŞƏRTLİ HİPERBOLİK
TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BƏZİ OPTİMAL İDARƏETMƏ
MƏSƏLƏLƏRİNİN TƏDQIQI

1211.01 – Diferensial tənliklər

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

BAKİ - 2013

Dissertasiya işi "Neftqazavtomat" Elmi İstehsalat Müəssisəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər:

fizika-riyaziyyat elmlər doktoru, professor

H.F.Quliyev
(Bakı Dövlət Universiteti)

Rəsmi opponentlər:

riyaziyyat elmlər doktoru

R.Q.Tağıyev
(Bakı Dövlət Universiteti)

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru, dosent

R.S.Məmmədov
(Azərbaycan Dövlət Neft Akademiyası)

Aparıcı təşkilat:

Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti
("Riyazi analiz" kafedrası)

Müdafiə 22 oktyabr 2013-cü il saat 14:00-da Bakı Dövlət Universitetinin nəzdindəki FD.02.016 Dissertasiya Şurasının iclasında olacaqdır.

Ünvan: AZ1148, Bakı şəhəri, Z.Xəlilov küçəsi, 23.

Dissertasiya ilə Bakı Dövlət Universitetinin elmi kitabxanasında tanış olmaq olar.

Avtoreferat 10 sentyabr 2013-cü ildə göndərilmişdir.

FD.02.016 Dissertasiya Şurasının
elmi katibi, r.e.d., professor

N.Q.Əhmədov

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı. Hal-hazırda optimal idarəetmə nəzəriyyəsi həm nəzəri nöqteyi-nəzərdən, həm də çox sayda tətbiq məsələlərinin həlli ilə əlaqədar olaraq, riyaziyyatın ən sürətlə inkişaf edən istiqamətlərindən biridir.

Məlumdur ki, optimal idarəetmə nəzəriyyəsinin əsas məsələləri aşağıdakılardır:

- a) optimal idarəedicinin varlığının öyrənilməsi;
- b) optimallığın zəruri şərtlərinin çıxarılması;
- c) optimal idarəedicinin təqribi qurulması;

Adi diferensial tənliklərlə təsvir olunan proseslərdə belə məsələlər kifayət qədər tam öyrənilmişdir. Lakin xüsusi törəməli diferensial tənliklərlə təsvir olunan proseslər üçün (o cümlədən hiperbolik tənliklər üçün) yuxarıda qeyd olunan optimal idarəetmə məsələləri tam işlənilməmişdir.

Xüsusi törəməli tənliklər üçün optimal idarəetmə məsələləri K.R.Aydazadə, A.Q.Butkovski, F.P.Vasilyev, A.İ.Yeqorov, V.İ.Zubov, J.L.Lions, K.A.Lurye, K.K.Həsənov, A.D.İsgəndərov, H.F.Quliyev, K.B.Mənsimov, A.C.Məmmədov, M.C.Mərdanov, T.K.Məlikov, V.İ.Plotnikov, M.A.Sadıqov, T.K.Sirazetdinov, V.İ.Sumin, R.K.Tağıyev, Z.İ.Xəlilov, Y.A.Şərifov, Ş.Ş.Yusubov, M.A.Yaqubov, Q.Y.Yaqubov və başqalarının işlərində tədqiq olunmuşdur.

Fizika, kimya və biologiyada öyrənilən bir sıra proseslərin riyazi modelləşdirilməsi zamanı elə məsələlər meydana gəlir ki, onlarda xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün qoyulan klassik şərtlər əvəzinə, axtarılan funksiyanın oblastın sərhədi və daxilindəki qiymətləri arasında müəyyən əlaqə verilir. Qeyri-lokal adlanan bu tip şərtlə məsələlər son dövrlərdə mütəxəssislərin diqqətini daha çox cəlb edir. Qeyri-lokal məsələlərin tədqiqinə A.V.Biçadze, A.A.Samarski, A.A.Dezin, V.A.İlin, E.A.Moiseyev, L.S.Pulkina, A.M.Naxuşev, T.Ş.Kalmenov və başqaları böyük töhvə vermişlər.

Qeyri-lokal məsələlər arasında integral şərtlərlə verilən məsələlər böyük maraq doğurur. Belə şərtlərə plazmada baş verən hadisələrin modelləşdirilməsində, istiliyin yayılması prosesində, bəzi texnoloji proseslərdə, məsaməli mühitlərdə nəmlikkeçirmə proseslərində, həmçinin növlərin populyasiya sayının dinamikasının təsviri zamanı riyazi biologiyanın tərs məsələlərində və demoqrafiya məsələlərində rast gəlinir.

İnteqral şəkilli şərtlərin meydana gəlməsi, baxılan oblastda kəmiyyətlərin bu və ya digər real xarakteristikalarının ölçülməsində imkanların məhdud olmasından irəli gəlir.

Məlum olduğu kimi, xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün inteqral şərtlərlə verilən məsələyə ilk dəfə istilikkeçirmə tənliyi üçün C.R.Kennon baxmışdır. Son dövrlərdə müxtəlif tipli tənliklər üçün belə məsələlərə həsr olunmuş işlər nəşr olunmuşdur (N.İ.İonkin, N.İ.Yurçuk, V.L.Kaminin, A.M.Naxuşev, A.İ.Kojanov, V.B.Dimitriyev və başqalarının işlərinə bax). Bu sahədə tədqiqatlar əvvəlcə elliptik və parabolik tənliklərdən başlanmışdır.

Bir qədər sonra oxşar məsələlər hiperbolik tip tənliklər üçün öyrənilməyə başlanmışdır (V.B.Dimitriyev, A.İ.Kojanov, L.S. Pulkina, S.A.Beilin və başqalarının işlərinə bax).

Qeyd edək ki, qeyri-lokal sərhəd şərtli hiperbolik tip tənliklərlə təsvir olunan proseslər üçün optimal idarəetmə məsələləri az öyrənilmişdir.

Bunun əsas səbəbi ondan ibarətdir ki, qeyri-lokal sərhəd şərtli hiperbolik tənliklər üçün sərhəd məsələlərinin özünün öyrənilməsi kifayət qədər çətin məsələdir.

Qeyri-lokal sərhəd şərtli hiperbolik tip tənliklərlə təsvir olunan proseslərdə optimal idarəetmənin ayrı-ayrı məsələləri K.K.Həsənovun, T.M.Qasimovun, H.F.Quliyevin, F.T.İbiyevin, M.F.Mehdiyevin, Ş.Ş.Yusubovun, Y.A.Şərifovun, T.F.Şirinovun və başqalarının işlərində tədqiq olunmuşdur.

Yuxarıda deyilənlərə əsasən dissertasiya işinin mövzunu həm nəzəri, həm də praktik nöqteyi-nəzərdən aktual hesab edirik.

İşin məqsədi. İşin məqsədi qeyri-lokal sərhəd şərtli hiperbolik tip tənliklər üçün aşağıdakı optimal idarəetmə məsələlərinin tədqiqidir:

- qeyri-lokal şərtli hiperbolik tənlik üçün sərhəd məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi teoremini isbat etmək;

- qeyri-lokal şərtli hiperbolik tənliklər üçün optimal idarəetmə məsələlərində optimal idarəedicinin varlığı teoremlərini isbat etmək;

- qeyri-lokal şərtli hiperbolik tənliklərlə təsvir olunan proseslərdə optimallığın zəruri şərtlərini çıxarmaq;

- qeyri-lokal şərtli dalğa tənliyi üçün optimal idarəetmə məsələsində funksionalın qradientini hesablamaq.

Tədqiqat üsulları. Dissertasiya işində funksional analizin üsullarından, xüsusi törəməli diferensial tənliklər nəzəriyyəsidəki Furse

üsulundan, Faedo-Qalyorkin üsulundan, optimal idarəetmənin riyazi nəzəriyyəsi üsullarından istifadə olunmuşdur.

Elmi yeniliklər.

-qeyri-lokal şərtli hiperbolik tənlik üçün sərhəd məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi teoremi isbat edilmişdir;

-qeyri-lokal şərtli hiperbolik tənliklər üçün optimal idarəetmə məsələlərində optimal idarəedicinin varlığı teoremləri isbat edilmişdir;

-qeyri-lokal şərtli hiperbolik tənliklərlə təsvir olunan proseslərdə optimallığın zəruri şərtləri çıxarılmışdır;

-qeyri-lokal şərtli dalğa tənliyi üçün optimal idarəetmə məsələsində funksionalın qradienti üçün düstur alınmışdır.

Nəzəri və praktik əhəmiyyəti. Dissertasiya işində alınan, uyğun metodikanın işlənilməsindən ibarət olan nəzəri xarakterli nəticələri paylanmış parametrlı sistemlər üçün optimal idarəetmə məsələlərinin həlli zamanı istifadə etmək olar.

Dissertasiyada baxılan məsələlərin praktik əhəmiyyəti isə ondan ibarətdir ki, onlar müxtəlif texnoloji proseslərin riyazi modeli kimi, həmçinin rəqs və dalğa proseslərində optimal idarəetmə məsələlərinin həlli üçün istifadə oluna bilər.

Beləliklə dissertasiya işində öyrənilən məsələlər nəinki nəzəri, həm də praktik maraq kəsb edir.

İşin aprobasiyası. İşdə alınan nəticələr BDU-nun “Diferensial və integral tənliklər” (rəhbər prof. N.Ş.İsgəndərov), “İdarəetmə nəzəriyyəsinin riyazi üsulları” (rəhbər prof. M.A.Yaqubov), SDU-nun “Diferensial tənliklər və riyazi kibernetika” (rəhbər prof. F.G.Feyziyev) kafedralarının seminarlarında, akademik Əşrəf Hüseynovun 100 illik yubileyinə həsr olunmuş konfransda (BDU-2007), “Türk Dünyası Matematik Sempozyumu” elmi konfransında (Sakarya-2007), “Riyaziyyatın tətbiqi məsələləri və yeni informasiya texnologiyaları” beynəlxalq konfransında (Sumqayıt-2007), “IV congress of the Turkic World Mathematical Society” beynəlxalq konqresdə (Bakı-2011) müzakirə olunub.

İşin məzmunu

Dissertasiya iki fəsil, xülasə və ədəbiyyat siyahısından ibarətdir.

Girişdə mövzunun aktuallığı əsaslandırılır və əsas nəticələr gətirilir.

Birinci fəsil üç yarımfəsildən ibarətdir.

1.1 yarımfəsildə

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j} \right) = f(x,t,u(x,t)), (x,t) \in Q_T \quad (1)$$

tənliyi üçün

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

başlangıç şərtləri və

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i) = \int_{\Omega} K(x,y,t,u(y,t)) dy \quad (x,t) \in S_T \quad (3)$$

qeyri-lokal şərtlə verilmiş məsələnin həllinin varlığı və yeganəliyi öyrənilmişdir, burada

$$S_T = \{(x,t) : x \in \partial\Omega, 0 < t < T\} - Q_T = \{(x,t) : x \in \Omega, 0 < t < T\}$$

silindrinin yan səthi, $\Omega - R^m$ -də hamar $\partial\Omega$ sərhədli məhdud oblast, $T > 0$ verilmiş ədəd, $\nu - S_T$ -nin xarici normalı, $a_{ij}(x,t)$, $f(x,t,u)$,

$K(x,y,t,u)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ verilmiş funksiyalardır.

Fərz edək ki, (1)-(3) məsələsinin verilənləri aşağıdakı şərtləri ödəyir:

$$1. a_{ij}(x,t), \frac{\partial a_{ij}(x,t)}{\partial t} \in C(\overline{Q}_T), \text{ belə ki, } \forall \xi \in R^m \text{ və bütün}$$

$$(x,t) \in \overline{Q}_T \text{ üçün } \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \geq \mu \sum_{i=1}^m \xi_i^2, \mu = \text{const} > 0,$$

$$a_{ij}(x, t) = a_{ji}(x, t), \quad i, j = 1, 2, \dots, m;$$

$$2. \varphi_0(x) \in W_2^1(\Omega), \varphi_1(x) \in L_2(\Omega);$$

3. $f(x, y, t, u)$ funksiyası $\overline{Q_T} \times R$ -də kəsilməzdir və $(x, t) \in \overline{Q_T}$ üçün mün-təzəm olaraq u -ya görə Lipşis şərtini ödəyir, $K(x, y, t, u)$ funksiyası

$$\overline{\partial\Omega} \times \overline{Q_T} \times R \text{-də kəsilməzdir və } \frac{\partial K}{\partial t}, \frac{\partial K}{\partial u} \text{ kəsilməz törəmələri vardır,}$$

$$\text{belə ki, } K(x, y, t, 0) = 0, \quad \frac{\partial K(x, y, t, 0)}{\partial t} = 0, \quad \left| \frac{\partial K(x, y, t, u)}{\partial u} \right| \leq c, \quad c = \text{const} > 0,$$

$$K(x, y, t, u) \text{ və } \frac{\partial K(x, y, t, u)}{\partial t} \text{ funksiyaları } u \text{-ya görə Lipşis şərtini}$$

ödəyirlər. Bundan əlavə fərz edək ki, $A = \alpha L \left(\frac{1}{2} + (mes\Omega)^2 \right) < 1$, burada,

$$\alpha \text{ ədədi } \int_{\partial\Omega} |w(x)| ds \leq \alpha \int_{\Omega} (|w(x)| + |\nabla w(x)|) dx, \quad w(x) \in W_2^1(\Omega)$$

bərabərsizliyindəki sabitdir.

Bu üç şərti “A şərti” adlandırmaq.

Tərif 1. (1)-(3) məsələsinin ümumiləşmiş həlli dedikdə elə $u(x, t) \in W_2^1(Q_T)$, funksiyası başa düşülür ki, o, $\forall \Phi(x, t) \in W_2^1(Q_T)$, $\Phi(x, T) = 0$ üçün

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} \left(-\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} + \sum_{i, j=1}^m a_{ij}(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x_i} \right) dx dt - \\ & - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \Phi(x, t) \int_{\Omega} K(x, y, t, u(y, t)) dy ds dt = \\ & = \int_{Q_T} f(x, t, u(x, t)) \Phi(x, t) dx dt + \int_{\Omega} \varphi_1(x) \Phi(x, 0) dx, \end{aligned} \quad (4)$$

integral eyniliyini və $u(x,0) = \varphi_0(x)$ şərtini $\lim_{t \rightarrow +0} \int_{\Omega} (u(x,t) - \varphi_0(x))^2 dx = 0$ mənada ödəsin.

Teorem 1. Əgər “A şərti” ödənersə, (1)-(3) qarışıq məsələsinin yeganə ümumiləşmiş həlli var.

İkinci yarımfəsildə

$$J(\vartheta) = \int_{Q_T} f_0(x, t, u(x, t), \vartheta(x, t)) dx dt \quad (5)$$

funksionalının

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \Delta u(x, t) = f(x, t, u(x, t), \vartheta(x, t)), \quad (6)$$

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{S_T} = \int_{\Omega} K(x, y) u(y, t) dy, \quad (8)$$

şərtləri daxilində minimallaşdırılması məsələsində optimal idarəedicin varlığı öyrənilmişdir, burada $u(x, t)$ -prosesin vəziyyəti, $\vartheta(x, t)$ -idarəedici funksiyadır.

Mümkün idarəedicilər sinfi U_{ad} olaraq ölçülən və məhdud, sanki

bütün $(x, t) \in Q_T$ -lər üçün qiymətləri müəyyən kompakt $V \subset R^r$ çoxluğundan olan r -ölçülü $\vartheta(x, t)$ vektor funksiyalar çoxluğu götürülür, belə ki, $V \neq \emptyset$.

Tutaq ki, aşağıdakı şərtlər ödənilir:

$$1. \varphi_0(x) \in W_2^1(\Omega), \varphi_1(x) \in L_2(\Omega), K(x, y) \in L_2(\Omega \times \Omega),$$

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} (K^2(x, y) + \frac{1}{2} \left| \nabla_x K(x, y) \right|^2) dx dy = L < \infty;$$

2. $f(x, t, u, \vartheta)$ və $f_0(x, t, u, \vartheta)$ funksiyaları $\overline{Q_T} \times R \times V$ -də kəsilməzdir; $f(x, t, u, \vartheta)$ funksiyası $(x, t) \in Q_T$, $\vartheta \in V$ -yə görə müntəzəm olaraq u -ya nəzərən Lipşis şərtini ödəyir; $f_0(x, t, u, \vartheta)$ funksiyası

$|f_0(x, t, u, \vartheta)| \leq a_0 + b_0|u|^2$ şərtini ödəyir, burada $a_0, b_0 = \text{const} > 0$;

3. Hər bir $(x, t, u) \in \overline{Q_T} \times R$ nöqtəsi üçün $R^+(x, t, u) = \{(\eta, \xi) \in R^2 : \eta \geq f_0(x, t, u, \vartheta), \xi = f(x, t, u, \vartheta), \vartheta \in V\}$ çoxluğu R^2 -də qapalı və qabarıqdır.

Bu şərtləri “B şərti” adlandıraraq.

Tərif 2. Mümkün idarəedici olan $\vartheta_0(x, t)$ funksiyası (5) funksionalına (6)-(8) şərtləri daxilində minimum qiymət verərsə, o, optimal idarəedici, $(u_0(x, t), \vartheta_0(x, t))$ -isə optimal cütlük adlanır.

Teorem 2. Tutaq ki, “B şərti” ödənilir. Onda (5)-(8) məsələsində optimal idarəedici var.

1.3 yarımfəslində

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \sum_{i, j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} \right) = f(x, t, u(x, t), \vartheta(x, t)) \quad (9)$$

tənliyi üçün

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \varphi_1(x) \quad (10)$$

başlangıç şərtləri və

$$\sum_{i, j=1}^m a_{ij}(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} \cos(v, x_i) = \int_{\Omega} K(x, y, t, u(y, t)) dy, (x, t) \in S_T \quad (11)$$

qeyri-lokal sərhəd şərtilə verilmiş optimal idarəetmə məsələsinə baxılmışdır. Mümkün idarəedicilər sinfi U_{ad} ikinci yarımfəsilə olduğu kimi götürülür.

Teorem 3. Tutaq ki aşağıdakı şərtlər ödənilir:

$$1. \ a_{ij}(x, t), \frac{\partial a_{ij}(x, t)}{\partial t} \in C(\overline{Q}_T), \text{ belə ki, } \forall \xi \in R^m \text{ və hər bir } (x, t) \in \overline{Q}_T \text{ üçün } \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \mu \sum_{i=1}^m \xi_i^2, \quad \mu = \text{const} > 0, \\ a_{ij}(x, t) = a_{ji}(x, t), \ i, j = 1, 2, \dots, m;$$

$$2. \ \varphi_0(x) \in W_2^1(\Omega), \varphi_1(x) \in L_2(\Omega);$$

3. $f(x, t, u, \vartheta)$ və $f_0(x, t, u, \vartheta)$ funksiyaları $\overline{Q}_T \times R \times V$ -də kəsilməzdir, $f(x, t, u, \vartheta)$ funksiyası $(x, t) \in \overline{Q}_T$, $\vartheta \in V$ -yə görə müntəzəm olaraq u -ya nəzərən Lipşis şərtini ödəyir, $f_0(x, t, u, \vartheta)$ funksiyası $|f_0(x, t, u, \vartheta)| \leq a_0 + b_0|u|^2$ şərtini ödəyir, burada $a_0, b_0 = \text{const} > 0$, $K(x, y, t, u)$ funksiyası $\overline{\partial\Omega} \times \overline{Q}_T \times R$ -də kəsilməzdir və $\frac{\partial K}{\partial t}, \frac{\partial K}{\partial u}$ kəsilməz törəmələri vardır, belə ki, $K(x, y, t, 0) = 0$, $\frac{\partial K(x, y, t, 0)}{\partial t} = 0$, $\left| \frac{\partial K(x, y, t, u)}{\partial u} \right| \leq c$, $K(x, y, t, u)$ və $\frac{\partial K(x, y, t, u)}{\partial t}$ u -ya görə Lipşis şərtini ödəyirlər;

4. Hər bir $(x, t, u) \in \overline{Q}_T \times R$ nöqtəsi üçün $R^+(x, t, u) = \{(\eta, \xi) \in R^2 : \eta \geq f_0(x, t, u, \vartheta), \xi = f(x, t, u, \vartheta), \vartheta \in V\}$ çoxluğu R^2 -də qapalı və qabarıq çoxluqdur.

Onda (5),(9)-(11) məsələsində optimal idarəedici var.

İkinci fəsil altı yarım fəsildən ibarətdir.

2.1 yarımfəslində aşağıdakı məsələdə optimallıq üçün zəruri şərt alınmışdır.

Tutaq ki, proses

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = g(x),$$

$$(x,t) \in Q_T = \{0 < x < l, 0 < t < T\}, \quad (12)$$

tənliyi

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \quad 0 < x < l \quad (13)$$

başlangıç şərtləri və

$$u(0,t) = 0, \quad (14)$$

$$\int_0^l u(x,t) dx = 0, \quad 0 < t < T \quad (15)$$

sərhəd şərtləri ilə təsvir olunur. Burada $u(x,t)$ -prosesin vəziyyətini xarakterizə edir, $g(x)$ -idarəedici funksiyadır. Fərz edək ki, $g(x) \in U_{ad} \subset L_2(0,l)$, belə ki, $U_{ad} \neq \emptyset$ qabarıq çoxluqdur,

$\varphi_0 \in W_2^2(0,l)$, $\varphi_1 \in W_2^1(0,l)$ -verilmiş funksiyalardır və $\varphi_0(0) = 0$,

$\varphi_1(0) = 0$, $\int_0^l \varphi_0(x) dx = 0$, $\int_0^l \varphi_1(x) dx = 0$. Fərz edək ki, (12)-(15)

məsələsinin hər bir $g(x)$ mümkün idarəedicisinə uyğun $W_2^2(Q_T)$ -də yeganə həlli var.

Aşağıdakı kimi məsələyə baxaq. U_{ad} -dən elə idarəedici tapmalı ki, həmin idarəedici (12)-(15) məsələsinin həlli ilə birlikdə

$$J(g) = \frac{1}{2} \int_{Q_T} (u - \bar{u})^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^l g^2(x) dx, \quad (16)$$

funksionalına minimum qiymət versin, belə ki, $\bar{u}(x, t) \in W_2^{0,1}(Q_T)$ -dən olan verilmiş funksiyadır.

Teorem 4. Fərz edək ki, (12)-(16) məsələsinin verilənləri üzərinə yuxarıda qoyulan şərtlər ödənilir. Onda $\mathcal{G}_0(x)$ optimal idarəedicisi və hər bir $\mathcal{G}(x) \in U_{ad}$ idarəedicisi üçün aşağıdakı bərabərsizliyin ödənməsi zəruri və kafidir:

$$\int_0^l \left(\mathcal{G}(x) - \int_0^T \psi(x, t) dt + \int_0^T \psi(l, t) dt \right) (\mathcal{G}(x) - \mathcal{G}_0(x)) dx \geq 0,$$

burada $\psi(x, t)$

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = \bar{u} - u, \quad (17)$$

$$\psi(x, T) = 0, \quad \frac{\partial \psi(x, T)}{\partial t} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \psi(l, t)}{\partial x} = 0, \quad \psi(0, t) = \psi(l, t) \quad (19)$$

qoşma məsələsinin həllidir.

2.2 yarımfəslində aşağıdakı məsələdə optimallığın zəruri şərti alınmışdır: elə idarəedici tapmalı ki, o

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \mathcal{G}(x, t), \quad (x, t) \in Q_T = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}, \quad (20)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < l, \quad (21)$$

$$u(0, t) = 0, \quad \int_0^l u(x, t) dx = 0, \quad 0 < t < T, \quad (22)$$

qeyri-lokal sərhəd məsələsinin həlli ilə birlikdə

$$J(\vartheta) = \frac{1}{2} \int_{Q_T} (u - \bar{u})^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_{Q_T} \vartheta^2(x, t) dxdt \quad (23)$$

funksionalına minimum qiymət versin.

Mümkün idarəedicilər sinfi olaraq

$$U_{ad} = \{\vartheta(x, t) : \vartheta(x, t), \vartheta_t(x, t), \vartheta_{tt}(x, t) \in L_2(Q_T), \|\vartheta_{tt}\|_{L_2(Q_T)} \leq M\}$$

çoxlğu götürülür, belə ki, M - verilmiş ədəddir.

Teorem 5. Fərz edək ki, (20)-(23) məsələsinin verilənləri üzərinə yuxarıda qoyulan şərtlər ödənilir. Onda $\vartheta_0(x, t)$ optimal idarəedicisi və hər bir $\vartheta(x, t) \in U_{ad}$ idarəedicisi üçün

$$\int_{Q_T} (\vartheta(x, t) - \psi(x, t) + \psi(l, t))(\vartheta(x, t) - \vartheta_0(x, t)) dxdt \geq 0 \quad (24)$$

bərabərsizliyinin ödənməsi zəruri və kafidir, burada $\psi(x, t)$ (17)-(19) qoşma məsələsinin həllidir.

2.3 yarımfəslində aşağıdakı optimal idarəetmə məsələsinə baxılmışdır:

$$J(\vartheta) = \int_{Q_T} f_0(x, t, u(x, t), \vartheta(x, t)) dxdt \quad (25)$$

funksionalını

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t, u(x, t), \vartheta(x, t)),$$

$$(x, t) \in Q_T = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}, \quad (26)$$

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \quad (27)$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \int_0^l K(x) u(x, t) dx, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \int_0^l K(x) u(x, t) dx, \quad (28)$$

şərtləri daxilində minimallaşdırmaq tələb olunur, burada $\varphi_0 \in W_2^1(0, l)$,

$\varphi_1 \in L_2(0, l)$, $\int_0^l K^2(x)dx = L < \infty$. Mümkün idarəedicilər sinfi olaraq

$U_{ad} = \{\vartheta(x, t) : \vartheta(x, t) \in L_\infty(Q_T), \alpha \leq \vartheta(x, t) \leq \beta, Q_T - \text{də sanki hər yerdə}\}$ çoxluğu götürülür, burada α, β -verilmiş ədədlərdir.

Fərz edək ki, $f(x, t, u, \vartheta)$ və $f_0(x, t, u, \vartheta)$ funksiyaları

$\overline{Q_T} \times R \times [\alpha, \beta]$ -da kəsilməzdirlər, onların $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f_0}{\partial u}$ kəsilməz törəmələri var və $(x, t) \in \overline{Q_T}, \vartheta \in [\alpha, \beta]$ -ya görə müntəzəm olaraq u -ya nəzərən Lipşis şərtini ödəyirlər.

$\vartheta_0(x, t)$ mümkün idarəedicisi üçün

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} &= K(x)(\psi(l, t) - \psi(0, t)) + \\ &+ \frac{\partial H(x, t, u_0(x, t), \vartheta_0(x, t), \psi(x, t))}{\partial u}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\psi(x, T) = 0, \frac{\partial \psi(x, T)}{\partial t} = 0, \frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} = 0, \frac{\partial \psi(l, t)}{\partial x} = 0, \quad (30)$$

qoşma məsələsi daxil edilir, burada $H(x, t, u, \vartheta, \psi) = \psi(x, t) \times \times f(x, t, u, \vartheta) - f_0(x, t, u, \vartheta)$ - Hamilton-Pontryagin funksiyasıdır.

Teorem 6. Fərz edək ki, (25)-(28) məsələsinin verilənləri üzərinə yuxarıda qoyulan şərtlər ödənilir. Əgər (u_0, ϑ_0) -optimal cütlüxsə, $\psi(x, t)$ -ona uyğun (29)-(30) qoşma məsələsinin ümumiləşmiş həllidirsə, onda sanki bütün $(x, t) \in Q_T$ və bütün $\vartheta \in [\alpha, \beta]$ üçün

$$H(x, t, u_0(x, t), \vartheta, \psi(x, t)) \leq H(x, t, u_0(x, t), \vartheta_0(x, t), \psi(x, t))$$

bərabərsizliyi doğrudur.

2.4 yarımfəslində

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \Delta u = f(x, t, u(x, t), \vartheta(x, t)),$$

$$(x, t) \in Q_T = \{(x, t) : x \in \Omega, 0 < t < T\}, \quad (31)$$

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \quad (32)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{S_T} = \int_{\Omega} K(x, y) u(y, t) dy \quad (33)$$

şərtlər daxilində (5) funksionalının minimallaşdırması məsələsi tədqiq olunmuşdur: Mümkün idarəedicilər sinfi olaraq $U_{ad} = \{\vartheta(x, t) : \vartheta(x, t) \in L_{\infty}(Q_T), \alpha \leq \vartheta(x, t) \leq \beta, Q_T\text{-də sanki hər yerdə}\}$ çoxluğu götürülür, α, β -verilmiş ədədlərdir.

Fərz edək ki, (31)-(33) məsələsinin verilənləri aşağıdakı şərtləri ödəyir:

$$1. \varphi_0 \in W_2^1(\Omega), \varphi_1 \in L_2(\Omega), K(x, y) \in L_2(\Omega \times \Omega),$$

$$K(x, y) = K(y, x), \int_{\Omega} \int_{\Omega} (K^2(x, y) + \frac{1}{2} \left| \nabla_x K(x, y) \right|^2) dx dy = L < \infty;$$

$$2. f(x, t, u, \vartheta) \text{ və } f_0(x, t, u, \vartheta) \text{ funksiyaları } \overline{Q_T} \times R \times [\alpha, \beta] \text{-də kəsilməzdirlər və onlar } \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f_0}{\partial u} \text{ kəsilməz törəmələrinə malikdirlər, belə}$$

ki, $\frac{\partial f}{\partial u}$ məhduddur və o, u -ya görə λ göstəricisi ilə Hölder şərtini ödəyir, $\frac{2}{3} \leq \lambda \leq 1$, $\frac{\partial f_0}{\partial u}$ u -ya görə Lipşis şərtini ödəyir.

Teorem 7. Tutaq ki, (5), (31)-(33) məsələsinin verilənləri üzərinə qoyulan şərtlər ödəyir. Bundan əlavə $A = \alpha(1 + Lmes\Omega) < 1$. Əgər

(u_0, ϑ_0) -optimal cütlüksə, onda sanki bütün $(x, t) \in Q_T$ və bütün $\vartheta \in [\alpha, \beta]$ üçün

$H(x, t, u_0(x, t), \vartheta, \psi(x, t)) \leq H(x, t, u_0(x, t), \vartheta_0(x, t), \psi(x, t))$, bərabərsizliyi doğrudur, burada $\psi(x, t)$

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} - \Delta \psi = \int_{\Omega} K(\xi, x) \psi(\xi, t) ds + \frac{\partial H(x, t, u_0(x, t), \vartheta_0(x, t), \psi(x, t))}{\partial u}, \quad (34)$$

$$\psi(x, T) = 0, \quad \frac{\partial \psi(x, T)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} \Big|_{S_T} = 0. \quad (35)$$

qoşma məsələsinin həllidir.

İsbat olunan teorem baxılan məsələdə optimallıq üçün Pontryaginın maksimum prinsipi tipli zəruri şərtidir.

2.5 yarımfəslində aşağıdakı optimal idarəetmə məsələsinə baxılmışdır: (5) funksionalını (9)-(11) şərtləri daxilində minimallaşdırmaq tələb olunur.

Tutaq ki, məsələnin verilənləri aşağıdakı şərtləri ödəyir:

$$1. \quad a_{ij}(x, t), \frac{\partial a_{ij}(x, t)}{\partial t} \in C(\overline{Q_T}), \quad \forall \xi \in R^m \text{ və hər bir } (x, t) \in \overline{Q_T} \text{ üçün}$$

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \mu \sum_{i=1}^m \xi_i^2, \quad \mu = \text{const} > 0, \quad a_{ij}(x, t) = a_{ji}(x, t);$$

$i, j = 1, 2, \dots, m;$

$$2. \quad \varphi_0(x) \in W_2^1(\Omega), \varphi_1(x) \in L_2(\Omega);$$

$$3. \quad f(x, t, u, \vartheta) \text{ və } f_0(x, t, u, \vartheta) \text{ funksiyaları } \overline{Q_T} \times R \times [\alpha, \beta] \text{-da kəsilməzdir}$$

$$\text{və } \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f_0}{\partial u} \text{ kəsilməz törəmələrinə malikdirlər, belə ki, } \frac{\partial f}{\partial u}$$

törəməsi məhduddur və u -ya görə λ göstəricisi ilə Hölder şərtini

$$\text{ödəyir, } \frac{2}{3} \leq \lambda \leq 1, \frac{\partial f_0}{\partial u} \text{ } u \text{-ya görə Lipşis şərtini ödəyir, } K(x, y, t, u)$$

funksiyası $\overline{\partial\Omega} \times \overline{Q_T} \times R$ -də kəsilməzdir və $\frac{\partial K}{\partial t}, \frac{\partial K}{\partial u}$ kəsilməz törəmələri

vardır, belə ki, $K(x, y, t, 0) = 0$, $\frac{\partial K(x, y, t, 0)}{\partial t} = 0$, $\left| \frac{\partial K(x, y, t, u)}{\partial u} \right| \leq c$,

$\frac{\partial K(x, y, t, u)}{\partial u}$ funksiyası u -ya görə λ göstəricisi ilə Hölder şərtini

ödəyir, $\frac{2}{3} \leq \lambda \leq 1$, $\frac{\partial K(x, y, t, u)}{\partial t}$ funksiyası u -ya görə Lipşis şərtini

ödəyir, bundan əlavə fərz edək ki, $A = \alpha L \left(\frac{1}{2} + (mes \Omega)^2 \right) < 1$.

Bu şərtləri “C şərti” adlandırmaq.

Teorem 8. Tutaq ki, “C şərti” ödənilir. Əgər $(u_0, \mathcal{G}_0)$ -optimal cütlüxsə, onda sanki bütün $(x, t) \in Q_T$ və bütün $\mathcal{G} \in [\alpha, \beta]$ üçün

$$H(x, t, u_0(x, t), \mathcal{G}, \psi(x, t)) \leq H(x, t, u_0(x, t), \mathcal{G}_0(x, t), \psi(x, t)),$$

bərabərsizliyi doğrudur, burada $\psi(x, t)$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} - \sum_{i, j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x_j} \right) = \\ & = \int_{\partial\Omega} \psi(\xi, t) \frac{\partial K(\xi, x, t, u_0(x, t))}{\partial u} ds + \frac{\partial H(x, t, u_0(x, t), \mathcal{G}_0(x, t), \psi(x, t))}{\partial u}, \\ & \psi(x, T) = 0, \frac{\partial \psi(x, T)}{\partial t} = 0, \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial v} \Big|_{S_T} = 0 \end{aligned}$$

qoşma məsələsinin həllidir.

2.6 yarımfəslində 2.4 yarımfəslində qoyulan optimal idarəetmə məsələsinə baxılmışdır və funksionalın qradienti üçün ifadə tapılmışdır.

Sonda elmi rəhbərim **f.-r.e.d., prof. H.F.Quliyevə** məsələlərin qoyuluşuna və işə daimi diqqət yetirdiyinə görə dərin minnətdarlığımı bildirirəm.

Dissertasiyanın əsas məzmunu aşağıdakı işlərdə çap edilmişdir:

1. Кулиев Г.Ф., Шарифов Я.А., Тагиев Х.Т. Решение задачи оптимального управления для одномерного волнового уравнения с нелокальными граничными условиями //Доклады НАНА, 2006, № 3-4, с. 16-24.

2. Кулиев Г.Ф., Тагиев Х.Т. Задача оптимального управления для одномерного волнового уравнения с нелокальными граничными условиями //Вестник БГУ, серия физ.-мат. наук, 2007, № 4, с. 29-33.

3. Кулиев Г.Ф., Тагиев Х.Т. Задача оптимального управления с нелокальными условиями для волнового уравнения /Тезисы науч.конф. посв. 100-летию академика А.И.Гусейнова, БГУ, 2007, с.92-93.

4. Кулиев Г.Ф., Тагиев Х.Т. Задача оптимального управления для одной сингулярной распределенной системы /Материалы рес. науч. конф. «Прикладные задачи математики и новые информационные технологии», Сумгаит, 2007,с.95-96.

5. Guliyev H.F., Tagiyev H.T. An optimal control problem with nonlocal conditions for wave equation //Tran. of NAS of Azer., series of phis.-tech. and math. sciences, 2008, № 1, p.169-182.

6. Guliyev H.F., Tagiev H.T. Necessary conditions of optimality in a non-local problem for one-dimensional wave equation //Tran. of NAS of Azer., series of phis.-tech. and math. sciences, 2009, № 1, p.83-94.

7. Guliyev H.F., Tagiev KH.T. Optimal control problem for the wave equation with non-local conditions /II TDMS, 4-7 temmuz, 2007, Sakarya Universiteti, p.28.

8. Guliyev H.F., Tagiev H.T. Calculation of the gradient in the problem of optimal control for one non-local problem for weak-linear wave equation /The 4th Congres of the TWMS Baku, Azerbaijan, 1-3 july, 2011, p.400.

9. Guliyev H.F., Tagiev H.T. An optimal control problem with non-local conditions for the weakly nonlinear hyperbolic equation //Optimal control applications and methods, 2013, vol. 34, issu 2, p.216-235.

10. Tagiev H.T. On the existence of the solution of nonlocal condition optimal control problem for hyperbolic type equation //Tran. of NAS of Azer., series of phis.-tech. and math. sciences, 2012, № 1,p.127-138.

11. Tagiev H.T. On existence of solution on nonlocal condition optimal control problem for wave equation //NAS of Azerbaijan, Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics, vol. XXXVI(XLIV), 2012, p.135-144.

12. Tagiev H.T. Gradient of the functional in the optimal control problem with non-local conditions for the wave equation //NAS of Azerbaijan, Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics, vol. XXXVII(XLV), 2012,p.139-148.

ХИКМЕТ ТАХИР ОГЛЫ ТАГИЕВ

**ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ
ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМ
ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ**

АННОТАЦИЯ

Диссертационная работа посвящена исследованию задач оптимального управления с нелокальными граничными условиями для уравнения гиперболического типа.

В работе получены следующие основные результаты:

- доказана теорема существования и единственности решения задачи с нелокальным граничным условием для гиперболического уравнения;

- доказаны теоремы существования оптимального управления в задаче оптимального управления для гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием;

- выведены необходимые условия оптимальности в процессах, описываемых гиперболическими уравнениями с нелокальным граничным условием;

- выведена формула для градиента функционала в задаче оптимального управления для волнового уравнения с нелокальным граничным условием.

HIKMET TAHIR OGLU TAGIYEV

**INVESTIGATING SOME OPTIMAL CONTROL PROBLEMS
FOR HYPERBOLIC EQUATIONS WITH NON-LOCAL
BOUNDARY CONDITION**

ABSTRACT

The dissertational work is devoted to investigation of optimal control problems with non-local boundary conditions for hyperbolic type equation.

In the paper the following main results were obtained:

- a theorem on the existence and uniqueness of the solution of a problem with a non-local boundary condition for a hyperbolic equation was proved;
- theorems on the existence of optimal control in an optimal control problem for a hyperbolic equation with a non-local boundary condition were proved;
- necessary optimality conditions in processes described by hyperbolic equations with a non-local boundary condition were derived;
- a formula for the gradient of the functional in an optimal control problem for a wave equation with a non-local boundary condition was derived.

Sifariş 100. Tiraj 100.

*«**Bilik**» nəşriyyatında çap olunmuşdur.*

Ünvan: Sumqayıt şəh., 13-cü mk/r, Niyazi küçəsi,

E-mail: dereleyez-bilik@rambler.ru

bilik-2008@mail.ru

Tel.: (012) 408 39 51; (018) 656 50 42.

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

На правах рукописи

ХИКМЕТ ТАХИР оглы ТАГИЕВ

**ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ
ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМ
ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ**

1211.01 – Дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

Диссертации на соискание ученой степени доктора
философии по математике

Баку-2013