

На правах рукописи

САЛМАНОВ ВУГАР ИБРАГИМ оглы

**ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
СО СПЕЦИАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА**

1203.01 – Компьютерные науки

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

Баку – 2013

Работа выполнена на кафедре «Информатика» Нахчыванского
Государственного Университета.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор **А.Д.Искендеров**

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор **Ф.Г.Фейзиев**

доктор философии по математике, доцент **Р.А.Алиев**

Ведущая организация: Кафедра «Математика» Технического
Университета Азербайджана

Защита состоится 27 сентября 2013 г. в 15.00 часов на заседании
Диссертационного Совета D 01.121 при Институте Кибернетики
Национальной Академии Наук Азербайджана по адресу: г. Баку, ул.
Б.Вагабаде, 9

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института
Кибернетики НАН

Автореферат разослан _____ 2013 г.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета D 01.121,
Кандидат физико-математических наук:

А.Б.Пашаев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория оптимального управления с сосредоточенными параметрами относится к одному из ведущих разделов теории оптимальных процессов и теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

При изучении задач оптимального управления важное место занимают следующие вопросы: исследование корректности постановки задач оптимального управления; установление необходимых и достаточных условий оптимальности; разработка вычислительных и аналитических методов решения рассматриваемых задач оптимального управления. Изучению этих вопросов для задач оптимального управления системами с сосредоточенными параметрами посвящены работы Ахмедова К.Т., Ахиева С.С., Беллмана Р., Благодатских В.И., Болтянского В.Г., Будака Б.М., Варга Дж., Васильева Ф.П., Габасова Р., Гамкрелидзе Р.В., Кирилловой Ф.М., Красовского Н.Н., Кротова В.Ф., Ли Э., Мансимова К.Б., Марданова М.Дж., Маркус Л., Меликова Т.К., Мищенко Е.Ф., Мордуховича Б.Ш., Понтрягина Л.С., Срочко В.А., Тадумадзе Т.А., Темам Р., Федорова В.В., Филиппова А.Ф., Харатишвили Г.Л., Экланд И. и др.

Известно, что эффективнейшим средством исследования задач оптимального управления является принцип максимума Понтрягина, представляющий собой необходимое условие оптимальности в таких задачах. Принцип максимума открытый коллективом математиков во главе с академиком Л.С.Понтрягиным, представляет собой одно из крупнейших достижений современной математики, в том числе, теории оптимального управления с сосредоточенными и распределенными параметрами, появление которого стимулировало последующее бурное развитие этой теории, где фундаментальная роль принадлежит работам Понтрягина Л.С., Беллмана Р., Болтянского В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Фельдбаума А.А. и др.

Широкий класс задач управления процессами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями заключается в выборе такого управления из множества допустимых управлений, чтобы управляемая система перешла из начального состояния в конечное. Корректность этих задач, их разных вариантов и методы их решения изучены в обширной выше названной литературе.

Теория и методы решения задач оптимального управления системами с распределенными параметрами получили бурное развитие

после 70-х годов. В этом направлении следует отметить работы Бутковского А.Г., Васильева Ф.П., Егорова А.И., Егорова Ю.В., Искендерова А.Д., Кулиева Г.Ф., Лионса Ж.Л., Лурье К.А., Нифтиева А.А., Плотникова В.И., Райтума У.Е., Соколовского Я., Тагиева Р.К. Ягубова Г.Я., Ягубова М.А., Barbu V., Casas E., Fattorini H.O., Goebel M., Zolezzi T. и др.

В настоящее время изучены также ряд оптимизационных постановок этих задач. Во всех этих задачах выбором определенного критерия качества производится оптимальное управление системой, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями.

В данной диссертации рассматривается оптимизационная задача для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, отличная от ранее изученных подобных задач как видом критерия качества, характерным для постановок задач идентификации, так и функциональных пространств, куда принадлежит исходные данные и решения задачи. Отметим, что в данной работе в качестве целевого функционала используется критерия качества типа функционала Лионса. Критерия качества типа функционала Лионса впервые введена и исследована Лионсом для распределенных систем с управлением в начальном состоянии. Методы моделирования критерием качества типа функционала Лионса в дальнейшем введены и анализированы в работах Искендерова А.Д. для управления коэффициентами распределенных систем, то есть для вариационных постановок обратных задач об определении коэффициентов уравнений математической физики. С подобным критерием качества решены также разные задачи идентификации для уравнения Шредингера в работах Искендерова А.Д., Махмудова Н.М. и др.

В данной работе впервые задачи оптимального управления критерием качества типа функционала Лионса рассматриваются для системы, состояние которой описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. Поэтому исследование подобных задач несомненно представляется актуальным.

Цель работы. Изучить задачи оптимального управления системами, описываемыми нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями, линейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядка с критерием качества типа Лионса и применить разностный метод.

Методы исследования. В работе применяются методы математической теории оптимального управления, теории экстремальных

задач, обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, функционального анализа и вычислительной математики.

Научная новизна:

- Впервые рассмотрены задачи оптимального управления системами, описываемыми нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями и линейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков с критерием качества типа Лионса и конечно-разностный метод их решения.
- Доказаны теоремы существования и единственности решения задач оптимального управления системами, описываемыми нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями и линейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков.
- Найдены формулы для градиента рассматриваемых критериев качества.
- Установлены необходимые условия в виде принципа максимума Понтрягина и в виде вариационных неравенств.
- В случае задачи оптимального управления системой, описываемой линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка применен разностный метод к ее решению и доказана оценка сходимости разностных аппроксимаций по функционалу.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные в работе результаты развивают теорию оптимального управления с сосредоточенными параметрами и теорию разностных методов решения этих задач. Результаты диссертации могут найти применения в физике, в технике и в других областях современной практики.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях:

- кафедра «Оптимизации и управления» Бакинского Государственного Университета (руководитель проф. А.Д.Искендеров);
- кафедра «Информатика» Нахчыванского Государственного университета (руководитель доц. Э.Н.Маммадов);
- Международная конференция по Математическим Методам в Геофизике «ММГ-2008» (Россия, г.Новосибирск, 2008);

- Российская Школа-конференция с международным участием «Математика, Информатика, их роль в образовании» (Россия, г.Москва, 2009);
- Седьмая Всероссийская научная конференция с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (Россия, г.Самара, 2010);
- Международная конференция «Образование, наука и экономика в ВУЗах. Интеграция в международное образовательное пространство» (Польша, г.Плоцк 2010);
- IV международная конференция «Проблемы Кибернетики и информатики» (РСГ'2012) (Азербайджан, г.Баку);
- Четвёртая Международная конференция, посвящённая 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева, «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования» (Россия, г.Москва 2013).

Объем и структура работы. Диссертационная работа изложена на 142 страницах, состоит из списка обозначений, введения, трех глав, перечени основных результатов и списка используемых литератур, содержащих 145 наименований.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 15 работах, список которых приводится в конце автореферата.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В списке обозначений приводятся ряд обозначений и определения функциональных пространств, используемых в работе.

Во введении обосновывается актуальность темы, дается краткий обзор работ, примыкающих к теме диссертации и излагается краткое содержание работы.

Работа состоит из трех глав.

Первая глава посвящена изучению задачи оптимального управления для обыкновенных дифференциальных уравнений со специальным критерием качества. Эта глава состоит из четырех параграфов.

В параграфе 1.1. дается постановка задачи оптимального управления сосредоточенными системами со специальным критерием качества.

Пусть R^n – n -мерное евклидово пространство, $t > 0$ – время, $t \in [0, T]$, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ – n -мерная вектор-функция, $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$ – m -мерная вектор функция, $f(t, x, u) = (f_1(t, x, u), f_2(t, x, u), \dots, f_n(t, x, u))$ – n -мерная вектор-функция, которая определена для всех $t \in [0, T]$, $x \in R^n$, $u \in R^m$. Пусть кроме того, $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$, $x_T = (x_{T1}, x_{T2}, \dots, x_{Tn})$ принадлежит в R^n .

Пусть движения управляемого объекта описывается уравнением:

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1)$$

Фиксируем момент времени T и краевые условия:

$$x(0) = x_0, \quad (2)$$

$$x(T) = x_T. \quad (3)$$

Через

$$U \equiv \left\{ u = u(t) : u \in L_2^{(m)}(0, T), u(t) \in M, \forall t \in [0, T] \right\}$$

обозначим множество допустимых управлений, где $M \subset R^m$ – замкнутое ограниченное множество.

Пусть векторы $x_0, x_T \in R^n$ заданы. Пусть $x_0(t)$ является решением уравнения (1) при условии (2), а $x_T(t)$ является решением этого уравнения при условии (3). Задачу об определении $x_0(t)$ и $x_T(t)$ назовем задачами (1), (2) и (1), (3) соответственно. Задачи (1), (2) и (1), (3) являются задачами Коши для уравнения (1).

Под решением задачи (1), (2) при фиксированном управлении $u \in U$ будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x_0(t) \equiv x_0(t; u)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$x_0(t) \equiv x_0 + \int_0^t f(\tau, x_0(\tau), u(\tau)) d\tau \quad (4)$$

для $\forall t \in [0, T]$.

Аналогично, под решением задачи (1), (3) при фиксированном управлении $u \in U$ будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x_0(t) \equiv x_0(t, u)$, удовлетворяющую интегральному тождеству:

$$x_T(t) \equiv x_T - \int_t^T f(\tau, x_T(\tau), u(\tau)) d\tau \quad (5)$$

для $\forall t \in [0, T]$.

Теперь рассмотрим задачу о минимизации функционала

$$J_\alpha(u) = \|x_0(\cdot, u) - x_T(\cdot, u)\|_{n,2}^2 + \alpha \|u - u_0\|_{m,2}^2 \quad (6)$$

на множестве допустимых управлений U . Здесь $\alpha \geq 0$ – числовой параметр, $u_0 = u_0(t)$ – заданный элемент пространства $L_2^{(m)}(0, T)$, $x_0(t) \equiv x_0(t, u)$, $x_0(t) \equiv x_0(t, u)$ являются решениями интегральных уравнений вида (4), (5), соответственно, при $u \in U$. Эту задачу оптимального управления будем вкратце называть задачей (6).

Пусть функция $f(t, x, u)$ определена в области $[0, T] \times R^n \times M$ и непрерывно по совокупности переменных, кроме того, удовлетворяют условию Липшица по переменным $x \in R^n, u \in M$ для всех $t \in [0, T]$:

$$|f(t, x, u) - f(t, y, v)|_n \leq L [|x - y|_n + |u - v|_m], \quad (7)$$

где $L > 0$ – некоторая постоянная Липшица.

При принятых предположениях для любой функции $u = u(t)$ из U задачи Коши (1), (2) и (1), (3) или интегральные уравнения вида (4), (5) имеют единственные решения, определенные и непрерывные на отрезке $[0, T]$. Эти решения почти всюду имеют производные, принадлежащие пространству $L_\infty^{(n)}(0, T)$.

В параграфе 1.2 изучаются вопросы корректности постановки задачи оптимального управления о минимизации функционала (6) на множестве U при условиях (4), (5).

Доказана следующая

Теорема 1. Существует плотное подмножество U_0 из пространства $L_2^{(m)}(0, T)$ такое, что при любом $\alpha > 0$ и любых $u_0 \in U$ задача (6) имеет единственное решение.

Далее в этом параграфе показана неустойчивость задачи (6) при $\alpha = 0$ и доказано существование хотя бы одного решения этой задачи.

В параграфе 1.3 изучается необходимое условие в виде принципа максимума Понтрягина. С этой целью вводится функция Гамильтона-Понтрягина для задачи (6) в виде

$$H(t, x_0(t), x_T(t), u(t), \psi_0(t), \psi_T(t)) = \langle \psi_0(t), f(t, x_0(t), u(t)) \rangle_{R^n} + \\ + \langle \psi_T(t), f(t, x_T(t), u(t)) \rangle_{R^n} - \|x_0(t) - x_T(t)\|_n^2 - \alpha \|u(t) - u_0(t)\|_m^2, \quad (8)$$

где $x_0(t)$, $x_T(t)$ – соответственно решения задач (4), (5) при $u \in U$, а функции $\psi_0(t)$, $\psi_T(t)$ являются решением следующей сопряженной системы:

$$\begin{aligned} \psi_0'(t) &= 2(x_0(t) - x_T(t)) - (f_{x_0}(t, x_0(t), u(t)))^T \psi_0(t), \\ \psi_0(T) &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \psi_T'(t) &= -2(x_0(t) - x_T(t)) - (f_{x_T}(t, x_T(t), u(t)))^T \psi_T(t), \\ \psi_T(0) &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где $f_x(t, x, u)$ – есть матрица частных производных вектора функции $f(t, x, u)$ по x , а $(f_x(t, x, u))^T$ есть транспонирование матрицы $f_x(t, x, u)$.

Пусть вектор функция $f(t, x, u)$ имеет частные производные $f_x = \{f_{1x}, f_{2x}, \dots, f_{nx}\}$ по переменным $x \in R^n$, которые непрерывны по совокупности своих аргументов $t \in [0, T]$, $x \in R^n$, $u \in M$ и, кроме того, $f_x(t, x, u)$ удовлетворяет условию Липшица по переменным (x, u) :

$$\|f_x(t, x + \Delta x, u + \Delta u) - f_x(t, x, u)\| \leq \tilde{L} (\|\Delta x\|_n + \|\Delta u\|_m) \quad (11)$$

при всех $(t, x, u), (t, x + \Delta x, u + \Delta u) \in [0, T] \times R^n \times M$, где $\|f_x\|$ означает норму матрицы f_x , а $\tilde{L} > 0$ – некоторая постоянная Липшица.

Доказана следующая

Теорема 2. Пусть функция $f(t, x, u)$ и ее частные производные $f_x(t, x, u)$ по переменной x непрерывны в области $[0, T] \times R^n \times M$ и удовлетворяют условиям (7), (11). Если $u = u(t)$ из U оптимальное управление в задаче (6), а $x_0(t), x_T(t)$ – есть соответствующие решения задач (4), (5) при $u \in U$, то

1) существуют n -мерные вектор-функции $\psi_0(t), \psi_T(t)$, которые являются решениями задач Коши (9), (10), соответственно;

2) для всех $t \in [0, T]$, являющихся точками непрерывности оптимального управления $u(t)$, функция $H(t, x_0(t), x_T(t), u, \psi_0(t), \psi_T(t))$ как переменной $u \in R^m$ достигает свою верхнюю грань на множестве M при $u = u(t)$, то есть

$$\begin{aligned} H(t, x_0(t), x_T(t), u(t), \psi_0(t), \psi_T(t)) = \\ = \sup_{u \in M} H(t, x_0(t), x_T(t), u(t), \psi_0(t), \psi_T(t)) \end{aligned} \quad (12)$$

для $\forall t \in [0, T]$.

В параграфе 1.4 изучается дифференцируемость критерия качества на множестве U и устанавливается необходимое условие в виде вариационного неравенства или интегрального принципа максимума.

Пусть с наряду выше указанными условиями вектор функция $f(t, x, u)$ имеет частные производные $f_u = \{f_{1u}, f_{2u}, \dots, f_{nu}\}$ по переменной $u \in R^m$, которые непрерывны по совокупности своих аргументов $t \in [0, T]$, $x \in R^n, u \in M$ и, кроме того, $f_u(t, x, u)$ удовлетворяет условию Липшица по переменным (x, u) :

$$\|f_u(t, x + \Delta x, u + \Delta u) - f_u(t, x, u)\| \leq L_0 (|\Delta x|_n + |\Delta u|_m) \quad (13)$$

при всех $(t, x, u), (t, x + \Delta x, u + \Delta u) \in [0, T] \times R^n \times M$, где $L_0 > 0$ – некоторая постоянная Липшица.

Теорема 3. Пусть вектор-функция $f(t, x, u)$ и ее частные производные по переменным (x, u) непрерывны в области $[0, T] \times R^n \times M$ и удовлетворяют условиям (7), (11), (13). Пусть, кроме того, M выпуклое множество из R^m . Тогда функционал $J_\alpha(u)$ дифференцируем по Фреше на множестве U и для его градиента справедливо выражение:

$$\begin{aligned} J'_\alpha(u) = & -\frac{\partial H}{\partial u} = -f_u^T(t, x_0(t), u(t))\psi_0(t) - \\ & - f_u^T(t, x_T(t), u(t))\psi_T(t) + 2\alpha(u(t) - u_0(t)) \end{aligned} \quad (14)$$

где $(f_u(t, x, u))^T$ есть транспонирование матрицы $f_u(t, x, u)$.

С помощью этой теоремы доказано необходимое условие в виде вариационного неравенства.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3. Пусть, кроме того, $u^* = u^*(t)$ есть оптимальное управление в задаче (6). Тогда для $\forall u \in U$ выполнено неравенство:

$$\begin{aligned} \int_0^T & \left((f_u(t, x_0^*(t), u^*(t)))^T \psi_0^*(t) + (f_u(t, x_T^*(t), u^*(t)))^T \psi_T^*(t) - \right. \\ & \left. - 2\alpha(u^*(t) - u_0(t)), u(t) - u^*(t) \right)_{R^m} dt \leq 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где $x_0^*(t) \equiv x_0(t; u^*)$, $x_T^*(t) \equiv x_T(t; u^*)$ – есть решения задач (4), (5), а $\psi_0^*(t) \equiv \psi_0(t; u^*)$, $\psi_T^*(t) \equiv \psi_T(t; u^*)$ – решение сопряженной задачи (9), (10) при $u^* \in V$.

Вторая глава посвящена изучению задач оптимального управления для систем, описываемых линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями со специальным критерием качества. Эта глава состоит из двух параграфов.

В параграфе 2.1 изучается задача оптимального управления для линейных сосредоточенных систем со специальным критерием качества.

Пусть требуется минимизировать функционал

$$J_\alpha(u) = \|x_0(\cdot, u) - x_T(\cdot, u)\|_{n, 2}^2 + \alpha \|u - u_0\|_{m, 2}^2 \quad (16)$$

на множестве $U \equiv \{u = u(t) : u \in L_2^{(m)}(0, T), \|u\|_{m, 2} \leq b_0\}$ при условиях

$$x_p'(t) = A(t)x_p(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad p = 0, T, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (17)$$

$$x_0(0) = x_0, \quad x_T(T) = x_T, \quad (18)$$

где $T > 0, b_0 > 0, \alpha \geq 0$ – заданные числа, $x_0, x_T \in R^n$ – заданные векторы, $u_0 \in L_2^{(m)}(0, T)$ заданный элемент, $A(t)$ – $n \times n$ -мерная матрица, $B(t)$ – $n \times m$ -мерная матрица, $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ – вектор-столбец. Будем предполагать, что элементы $a_{ij}(t), i, j = \overline{1, n}$ матрицы $A(t)$ и элементы $b_{ik}, i = \overline{1, n}, k = \overline{1, m}$ матрицы $B(t)$ измеримы и ограниченные функции на отрезке $[0, T]$, а $f \in L_2^{(n)}(0, T)$. Пусть $A_{\max} = \operatorname{vrai} \max_{t \in [0, T]} \|A(t)\|, B_{\max} = \operatorname{vrai} \max_{t \in [0, T]} \|B(t)\|$.

Доказана следующая

Теорема 5. Пусть элементы $A(t)$ и $B(t)$ являются измеримыми, ограниченными функциями на отрезке $[0, T]$, $f \in L_2^{(n)}(0, T)$. Тогда при $\alpha \geq 0$ и любого $u_0 \in L_2^{(m)}(0, T)$ задача оптимального управления (16)-(18) имеет хотя бы одно решение. Если $\alpha > 0$, то это решение единственно.

Далее в этом параграфе изучается дифференцируемость критерия качества. С этой целью сначала вводится функция Гамильтона-Понтрягина для задачи (16)-(18) в виде:

$$\begin{aligned} H(t, x_0(t), x_T(t), u, \psi_0(t), \psi_T(t)) = & \langle \psi_0(t), A(t)x_0(t) + B(t)u(t) + f(t) \rangle_{R^n} + \\ & + \langle \psi_T(t), A(t)x_T(t) + B(t)u(t) + f(t) \rangle_{R^n} - \\ & - |x_0(t) - x_T(t)|_n^2 - \alpha |u(t) - u_0(t)|_m^2, \end{aligned} \quad (19)$$

где $x_0(t), x_T(t)$ – решения задач (17), (18), а $\psi_0(t), \psi_T(t)$ являются решениями следующих сопряженных задач:

$$\psi_0'(t) = 2(x_0(t) - x_T(t)) - A^T(t)\psi_0(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (20)$$

$$\psi_T'(t) = -2(x_0(t) - x_T(t)) - A^T(t)\psi_T(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (21)$$

$$\psi_0(T) = 0, \quad \psi_T(0) = 0, \quad (22)$$

где $A^T(t)$ — транспонирование матрицы.

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда функционал $J_\alpha(u)$ дифференцируем по Фреше на множестве U и для его градиента справедливо выражение:

$$J_\alpha'(u) = -\frac{\partial H}{\partial u} = -B^T(t)\psi_0(t) - B^T(t)\psi_T(t) + 2\alpha(u(t) - u_0(t)),$$

$$\forall t \in [0, T], \quad (23)$$

где $B^T(t)$ — транспонирование матрицы $B(t)$.

С помощью этой теоремы доказывается

Теорема 7. Пусть выполнены условия теоремы 6. Тогда для того, что $u^*(t)$ из U было оптимальным управлением в задаче (16)-(18) необходимо и достаточно выполнение условия:

$$\int_0^T \langle B^T(t)\psi_0^*(t) + B^T(t)\psi_T^*(t) - 2\alpha(u^*(t) - u_0(t)), u(t) - u^*(t) \rangle_{R^m} dt \leq 0, \quad \forall u \in U, \quad (24)$$

где $\psi_0^*(t) \equiv \psi_0(t; u^*)$, $\psi_T^*(t) \equiv \psi_T(t; u^*)$ — решение сопряженной системы (20)-(22) при $u^* \in V$.

В параграфе 2.2 изучается задача оптимального управления для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с критерием качества типа функционала Лионса.

Пусть требуется минимизировать функционал

$$J_\alpha(u) = \|x_1(\cdot, u) - x_2(\cdot, u)\|_{L_2(0, T)}^2 + \alpha \|u - u_0\|_{L_2(0, T)}^2 \quad (25)$$

на множестве $U \equiv \left\{ u = u(t), u \in L_2(0, T), u(t) \geq b_0 > 0, \forall t \in [0, T], \|u\|_{L_2(0, T)} \leq b_1 \right\}$

при условиях

$$-\frac{d^2 x_p(t)}{dt^2} + u(t)x_p(t) = f_p(t), \quad t \in [0, T], \quad p = 1, 2, \quad (26)$$

$$x_1(0) = x_1(T) = 0, \quad (27)$$

$$\frac{dx_2(0)}{dt} = \frac{dx_2(T)}{dt} = 0, \quad (28)$$

где $T > 0, b_0 > 0, b_1 > 0, \alpha \geq 0$ – заданные числа, $u_0 \in L_2(0, T)$ заданный элемент, $f_p = f_p(t)$, $p = 1, 2$ – заданные функции из $L_2(0, T)$.

При каждом $u \in U$ задачу определения функций $x_p(t) \equiv x_p(t; u)$ из условий (26)-(28) будем называть редуцированной задачей. Под решением редуцированной задачи понимаются функции $x_1 \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, T)$, $x_2 \in W_2^1(0, T)$, удовлетворяющие интегральным тождествам:

$$\int_0^T \left[\frac{dx_p(t)}{dt} \frac{d\eta_p(t)}{dt} + u(t)x_p(t)\eta_p(t) \right] dt = \int_0^T f_p(t)\eta_p(t) dt, \quad p = 1, 2, \quad (29)$$

для любых функций $\eta_1 \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, T)$, $\eta_2 \in W_2^1(0, T)$.

Далее в этом параграфе изучается корректность задачи оптимального управления (25)-(28).

Доказаны следующие

Теорема 8. Существует всюду плотное подмножество G пространства $L_2(0, T)$, такое, что для $\forall u_0 \in G$ и $\alpha > 0$ задача оптимального управления (2.1)-2.4) имеет единственное решение.

Теорема 9. Задача оптимального управления (2.1)-(2.4) при $\alpha \geq 0$ имеет хотя бы одно решение для любого $u_0 \in L_2(0, T)$.

Теорема 10. Пусть $u_0 \in L_2(0, T)$ – заданная функция. Существует некоторое число $\alpha_0 > 0$, зависящее только от данных задачи (25)-(28), что для $\forall \alpha > \alpha_0$ задача оптимального управления (25)-(28) имеет единственное решение.

В этом параграфе далее изучается дифференцируемость критерия качества (25). С этой целью вводится функция Гамильтона-Понтрягина для задачи (25)-(28) в виде:

$$\begin{aligned} H(t, x_1(t), x_2(t), u, \psi_1(t), \psi_2(t)) = \\ = -(x_1(t)\psi_1(t) + x_2(t)\psi_2(t))u(t) - \alpha(u(t) - u_0(t))^2, \end{aligned} \quad (30)$$

где $x_p(t)$, $p = 1, 2$ – есть решение редуцированной задачи при $u \in U$, а $\psi_p(t)$, $p = 1, 2$ являются решением следующей сопряженной задачи:

$$-\frac{d^2\psi_p}{dt^2} + u(t)\psi_p = (-1)^p 2(x_1(t) - x_2(t)), \quad 0 < t < T, \quad p = 1, 2, \quad (31)$$

$$\psi_1(0) = \psi_1(T) = 0, \quad (32)$$

$$\frac{d\psi_2(0)}{dt} = \frac{d\psi_2(T)}{dt} = 0, \quad (33)$$

Имеет место

Теорема 11. Функционал $J_\alpha(u)$ дифференцируем по Фреше на множестве U и для его градиента справедливо выражение:

$$\begin{aligned} J'_\alpha(u) = -\frac{\partial H}{\partial u} = (x_1(t)\psi_1(t) + x_2(t)\psi_2(t)) + 2\alpha(u(t) - u_0(t))^2, \\ \forall t \in [0, T], \end{aligned} \quad (34)$$

где $x_p(t) \equiv x_p(t; u)$, $\psi_p(t) \equiv \psi_p(t; u)$, $p = 1, 2$ – есть решения редуцированной и сопряженной задач, соответственно, при $u \in U$.

С помощью этой теоремы установлено необходимое условие в виде вариационного неравенства:

Теорема 12. Пусть $u^* \in U$ есть решение задачи (25)-(28). Тогда справедливо неравенство:

$$\int_0^T (x_1^*(t)\psi_1^*(t) + x_2^*(t)\psi_2^*(t) + 2\alpha[u^*(t) - u_0(t)](u(t) - u^*(t)))dt \geq 0 \quad (35)$$

для $\forall u \in U$, где $x_p^*(t) \equiv x_p(t; u^*)$, $\psi_p^*(t) \equiv \psi_p(t; u^*)$, $p = 1, 2$ есть решения редуцированной и сопряженной задач, соответственно, при $u^* \in U$.

Далее в этом параграфе построен алгоритм численного решения задачи (25)-(28).

Третья глава работы посвящена разностному методу решения задачи оптимального управления для линейных сосредоточенных систем со специальным критерием качества типа функционала Лионса. Эта глава состоит из пяти параграфов.

В параграфе 3.1 дается постановка и дискретизация задачи оптимального управления о минимизации функционала

$$J(u) = \|x_0(\cdot, u) - x_T(\cdot, u)\|_{L_2^{(n)}(0, T)}^2 \quad (36)$$

на множестве $U \equiv \{u = u(t) : u \in L_2^{(m)}(0, T), \|u\|_{L_2^{(m)}(0, T)} \leq b_0\}$ при условиях

$$x_p'(t) = A(t)x_p(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad p = 0, T, 0 < t < T, \quad (37)$$

$$x_0(0) = x_0, \quad x_T(T) = x_T, \quad (38)$$

где $T > 0, b_0 > 0$ – заданные числа, $x_0, x_T \in R^n$ – заданные векторы, $u_0 \in L_2^{(m)}(0, T)$ заданный элемент, $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$ – матрица порядка $n \times n$, $B(t) = \{b_{ik}(t)\}$ – матрица порядка $n \times m$, $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))^T$ – вектор-столбец и $f \in L_2^{(n)}(0, T)$, $a_{ij} \in L_\infty(0, T)$, $i, j = \overline{1, n}$, $b_{ik} \in L_\infty(0, T)$, $i = \overline{1, n}, k = \overline{1, m}$.

Для дискретизации этой задачи разобьем отрезок $[0, T]$ на N частей точками $\{t_k, k = \overline{0, N}\} : 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$, приняв эти точки в качестве узловых, а управления (37) заменим разностными уравнениями с помощью простейшей явной схемы Эйлера. В результате придем к следующей дискретной задаче оптимального управления о минимизации функции

$$I_N([u]_N) = \sum_{k=0}^{N-1} |x_0^k - x_T^k|^2 \Delta t_k \quad (39)$$

на множестве

$$U_N = \left\{ [u]_N : [u]_N = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}), u_k \in R^m, k = \overline{0, N-1}, \left(\sum_{k=0}^{N-1} |u_k|_m^2 \Delta t_k \right)^{\frac{1}{2}} \leq b_0 \right\}$$

при условиях:

$$x_0^{k+1} = x_0^k + \Delta t_k (A_k x_0^k + B_k u_k + f_k), k = \overline{0, N-1}, \quad (40)$$

$$x_T^{k+1} = x_T^k + \Delta t_k (A_k x_T^{k+1} + B_k u_k + f_k), k = \overline{N-1, 0}, \quad (41)$$

$$x_0^0 = x_0, x_T^N = x_T, \quad (42)$$

где $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, $A_k = \{a_{ij}^k\}$, $B_k = \{b_{ir}^k\}$;

$$a_{ij}^k = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} a_{ij}(t) dt, b_{ir}^k = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_{ir}(t) dt, i, j = \overline{1, n}, r = \overline{1, m},$$

$$f_k = (f_{1k}, f_{2k}, \dots, f_{nk}), f_{ik} = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_i(t) dt, i = \overline{1, n}, k = \overline{0, N-1}, \quad (43)$$

$x_p^k = x_p^k([u]_N)$, $p = 0, T$, $k = \overline{0, N}$ – решение разностной схемы (40)-(42) при $[u]_N \in U_N$.

Далее в этом параграфе изучаются решения разностной схемы (40)-(42).

Доказана следующая:

Теорема 13. Пусть элементы матриц $A(t)$, $B(t)$ являются измеримыми и ограниченными функциями на отрезке $[0, T]$, $f \in L_2^{(n)}(0, T)$. Пусть, кроме того,

$$d_N = \max_{0 \leq k \leq N-1} \Delta t_k \leq \frac{T}{N} M, M = \text{const} > 0.$$

Тогда имеет место неравенство: $\forall [u]_N \in U_N$

$$\max_{0 \leq k \leq N} |x_p^k([u]_N)|_n \leq c_0, \quad p = 0, T, \quad (44)$$

где $c_0 > 0$ – постоянная не зависит от α и N .

В параграфе 3.2 изучается вопрос существования решения дискретной задачи оптимального управления (39)-(42).

При этом доказана:

Теорема 14. Пусть выполнены условия теоремы 13. Пусть, кроме того, элементы матриц A_k , B_k и вектор-столбец f_k определены формулами (43). Тогда дискретная задача оптимального управления (39)-(42) имеет хотя бы одно решение.

В параграфе 3.3 изучается погрешность аппроксимации разностной схемы (40)-(42) при каждом $[u]_N \in U_N$.

Пусть оператор $Q_N : L_2^{(m)}(0, T) \rightarrow L_{2N}^{(m)}$ определен в виде:

$$\begin{aligned} Q_N(u) &= [w]_N = (w_0, w_1, \dots, w_{N-1}), \\ w_k &= \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} u(t) dt, \quad k = 0, N-1, \end{aligned} \quad (45)$$

где $L_{2N}^{(m)}$ есть дискретный аналог пространства $L_2^{(m)}(0, T)$ с нормой:

$$\|[u]_N\|_{L_{2N}^{(m)}} = \left(\sum_{k=0}^{N-1} |u_m|^2 \Delta t_k \right)^{1/2}.$$

Пусть $y_p^k = x_p(t_k)$, $p = 0, T$, $k = \overline{0, N}$ есть значение решения задач Коши (37)-(38) при узловых точках разбиения $\{t_k, k = 0, N\}$ отрезке $[0, T]$. Пусть $z_p^k = x_p^k - y_p^k$, $p = 0, T$, $k = \overline{0, N}$ – погрешность разностной схемы (40)-(42) при $[u]_N \in U_N$. Тогда имеет место:

Теорема 15. Пусть выполнены условия теоремы 13. Тогда для $\forall u \in U$ и $\forall [u]_N \in U_N$ справедливы оценки:

$$|z_p^k|_n \leq c_1 \left(d_N + \delta_N + \|[u]_N - Q_N(u)\|_{L_{2N}^{(m)}} \right), \quad p = 0, T, \quad k = \overline{0, N}, \quad (46)$$

где $\delta_N > 0$, $\lim_{N \rightarrow \infty} \delta_N = 0$, $d_N = \max_{0 \leq k \leq N-1} \Delta t_k$, Q_N определен формулой (45).

В параграфе 3.4 изучается сходимость разностных аппроксимаций по функционалу в задаче (36)-(38).

При этом сначала доказана:

Теорема 16. Пусть выполнены условия теоремы 15. Тогда для $\forall u \in U$ и $\forall [u]_N \in U_N$ справедлива оценка

$$\|J(u) - I_n([u]_N)\| \leq c_2 \left(d_N + \delta_N + \|[u]_N - Q_N(u)\|_{L_{2N}^{(m)}} \right), \quad (47)$$

где $c_2 > 0$ – постоянная не зависит от N .

Далее в этом параграфе доказаны две вспомогательные леммы.

Лемма 1. Пусть выполнены условия теоремы 16. Пусть, кроме того, оператор $Q_N(u)$ для $\forall u \in U$ определен формулой (45). Тогда $Q_N(u) \in U_N$ и справедливо неравенство:

$$\|J(u) - Q_N(u)\| \leq c_3 (d_N + \delta_N). \quad (48)$$

Пусть оператор $P_N : L_{2N}^{(m)} \rightarrow L_2^{(m)}(0, T)$ определен формулой:

$$\tilde{u}(t) = P_N([u]_N) = u_k, \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad \forall [u]_N \in U_N. \quad (49)$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия теоремы 16. Пусть, кроме того, для $\forall [u]_N \in U_N$ оператор P_N определяется формулой (49). Тогда $P_N([u]_N) \in U$ и имеет место неравенство:

$$\|J(P_N([u]_N)) - I_n([u]_N)\| \leq c_2 (d_N + \delta_N). \quad (50)$$

С помощью этих лемм, наконец, доказана сходимость разностных аппроксимаций по функционалу со следующей теоремой.

Теорема 17. Пусть выполнены условия леммы 1 и 2. Пусть J_* нижняя грань функционала (36) при условиях (37), (38) на множестве U , I_{N*} – нижняя грань функции (39) при условиях (40)-(42) на множестве U_N .

Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_{n^*} = J_* \quad (51)$$

и справедлива оценка:

$$|I_{N^*} - J_*| \leq c_2 (d_N + \delta_N), \quad N = 1, 2, \dots, \quad (52)$$

где $c_2 > 0$ – постоянная не зависит от N .

В параграфе 3.5 описывается схема метода проекции градиента для решения задачи оптимального управления, рассмотренной параграфа 3.1 этой главы.

Заключение:

В первой главе диссертации получены следующие результаты:

- Впервые рассмотрены задачи оптимального управления системами, описываемыми нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями с критерием качества типа Лионса;
- Доказаны теоремы существования и единственности решения задач оптимального управления системами, описываемыми нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями;
- Доказана дифференцируемость рассматриваемого функционала Лионса и найдена формула для его градиента;
- Установлены необходимые условия в виде принципа максимума Понтрягина и в виде вариационных неравенств.

Во второй главе диссертации получены следующие результаты:

- Впервые рассмотрены задачи оптимального управления системами, описываемыми линейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков с критерием качества типа Лионса;
- Доказаны теоремы существования и единственности решения задач оптимального управления системами, описываемыми линейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков.;
- Доказана дифференцируемость рассматриваемого критерия качества и найдена формула для его градиента;

– Установлено необходимое условие оптимальности в виде вариационного неравенства.

Во третьей главе диссертации получены следующие результаты:

– Исследовано сходимость разностного метода решения задачи оптимального управления для линейных сосредоточенных систем со специальным критерием качества типа функционала Лионса;

– В случае задачи оптимального управления системой, описываемой линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка применен разностный метод к ее решению и доказана оценка сходимости разностных аппроксимаций по функционалу.

По теме диссертации опубликованы следующие работы:

1. В.И.Салманов. Об одной задаче оптимального управления для сосредоточенных систем специальным критерием качества. // Вестник Ленкоранского Государственного Университета, 2005, с. 83-90

2. Вугар Салманов. Разностный метод решения задачи оптимального управления для линейных сосредоточенных систем со специальным критерием качества. // Нахчыванский Государственный Университет, Известия №2 (20), Нахчыван - 2006, с. 98-100

3. Вугар Салманов. Существование решения дискретной задачи оптимального управления для линейных сосредоточенных систем со специальным критерием качества. // Научные Известии Ленкоранского Государственного Университета, Серия Естественных Наук, 2007, с. 92-96

4. Вугар Салманов. Условие оптимальности в задаче оптимального управления линейных сосредоточенных систем со специальным критерием качества. / Международная Конференция по Математическим Методам в Геофизике «ММГ-2008», 13-15 октября 2008 г. Новосибирск.

5. Vugar İ. Salmanov. Pontryagin's maximum principle in an optimal control problem for ordinary differential equations with special quality test. // National Academy of Sciences of Azerbaijan. Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics., Volume XXIX №37., Baku – 2008, p. 247-254

6. V.I.Salmanov. Existence of Optimal Control Problem Solution for linear Concentrated Systems with Special Quality Test. // National Aca-

demy of Sciences of Azerbaijan. Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics., Volume XXXI №39., Baku – 2009, p. 157-160

7. В.И.Салманов. Существование решения дискретной задачи оптимального управления для линейных сосредоточенных систем со специальным критерием качества. / Математика, Информатика, их приложения и роль в образовании. Тезисы докладов Российской Школы-конференции с международным участием., 14-18 декабря 2009 года Москва, Российский университет дружбы народов, 2009, стр.141-143

8. Н.М.Махмудов, В.И.Салманов. Существование решения задачи оптимального управления для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. / Математическое моделирование и краевые задачи. Труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. 3-6 июня 2010 г. Часть 3, Секция «Дифференциальные уравнения и краевые задачи», Самара. Самарский государственный технический университет, 2010, стр. 187-192

9. Салманов В.И. Корректность одной задачи оптимального управления для обыкновенных дифференциальных уравнений. / Образование, наука и экономика в ВУЗах. Интеграция в международное образовательное пространство Международная конференция, г.Плоцк, Польша, 20-25 сентября 2010, стр. 456-464

10. Вугар Салманов. Необходимое и достаточное условие оптимальности в одной задаче оптимального управления для линейных сосредоточенных систем. // Нахчыванский Государственный Университет. Научные Труды Серия физико-математических и технических наук. №1(35). Нахчыван, НГУ, 2011, с. 99-103

11. Н.М.Махмудов, В.И.Салманов. Разрешимость задачи оптимального управления для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с критерием качества Лионса. // Вестник Томского Государственного университета. Математика и механика № 1(17), 2012, стр. 36-46

12. V.İ. Salmanov, N. M. Mahmudov. Existente of the Solution of a Discrete Optimal Control Problem for Linear Concentrated Systems with Lions Special Quality Test. / PCI'2012, IV International conference "Problems of Cybernetics and Informatics", VolumeIV , September 12-14, 2012 Baku, Azerbaijan.

13. Н.М.Махмудов, В.И.Салманов. Существование решения дискретной задачи оптимального управления для линейных сосредото-

ченных систем со специальным критерием качеств. // Известия высших учебных заведений Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2012 г., №5(165). Россия, г. Ростов.

14. В.И.Салманов. О существование решение дискретной задачи оптимального управления для линейных сосредоточенных систем со специальным критерием качества. / Тезисы докладов Четвёртой Международной конференции, посвящённой 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцева, Москва 2013.

15. В.И.Салманов. Алгоритм численного решения одной задачи оптимального управления. // Transactions of Azerbaijan National Academy of Sciences, Informatics and Control Problems, Volume XXXIII №3, Baku 2013.

Личный вклад соискателя в совместно опубликованных научных работах. В работах [8,11,12,13]- соискателю принадлежит исследование вопросов существования и единственности оптимального управления.

Vüqar İbrahim oğlu Salmanov

Adi differensial tənliklər üçün xüsusi keyfiyyət kriteri ilə optimal idarəetmə məsələsi

XÜLASƏ

Dissertasiya işi adi differensial tənliklər üçün xüsusi keyfiyyət kriterili, yəni Lions funksiyonalı tipli keyfiyyət kriterili optimal idarəetmə məsələlərinə həsr olunmuşdur. Baxılan məsələlər fiziki və texniki proseslərin riyazi modelləşdirilməsi öyrənilərkən rast gəlinir.

Dissertasiya işində qeyri xətti adi differensial tənliklər, birinci və ikinci tərtib xətti adi differensial tənliklər üçün optimal idarəetmə məsələləri ayrı-ayrılıqda tədqiq edilmiş və aşağıdakı nəticələr əldə edilmişdir:

- qeyri-xətti adi differensial tənliklər, birinci və ikinci tərtib xətti adi differensial tənliklərlə təsvir olunan sistemlər üçün optimal idarəetmə məsələlərinin qoyuluşunun korrektiliyi öyrənilmiş və optimal idarəetmənin varlığı və yeganəliyi teoremləri isbat edilmişdir;

- baxılan keyfiyyət kriterlərinin qradiyenti üçün düsturlar tapılmışdır;

- pontryaginın maksimum prinsipi və variasiya bərabərsizliyi şəklində zəruri şərtlər əldə edilmişdir;

- xətti olan birinci tərtib adi diferensial tənliklərlə təsvir olunan sistemlər üçün optimal idarəetmə məsələsinin həllinə sonlu fərqlər üsulu tətbiq olunmuş və fərq approksimasiyalarının funksiyonala görə yığılma qiymətləndirməsi isbat olunmuşdur.

Vugar İbrahim Salmanov

Optimal management issue with specific quality criterion for the ordinary differential equations

SUMMARY

The dissertation was dedicated to the specific quality criterion for the ordinary differential equations, that's Lions type quality criterion issues. When studies mathematical modernization the physical and technical process of the mentioned issues are come across respectively.

Non-lined ordinary differential equations, optimal management issues for the first and second composite lines ordinary differential equations have been investigated separately in the dissertation work and the below stated results have been achieved:

- the exactness of optimal management issues statement specific for non-lined ordinary differential equations, the systems described with the first and second composite lined ordinary differential equations have been investigated and existence and solvability were proved with the theorems;
- formulas for the given quality criterion gradient were found;
- in the form of maximum principle of Pontryagin and variety inequality necessary conditions were gained;
- the methods of differences for the systems was involved to the solution of the optimal management as described with the ordinary differential equations of the lined first composite and accumulated estimation was proved according to the differential approximational.

Əlyazma hüququnda

SALMANOV VÜQAR İBRAHİM OĞLU

**ADİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN XÜSUSİ KEYFİYYƏT
KRİTERİ İLƏ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ**

1203.01 - Kompüter elmləri

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün
təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı-2013